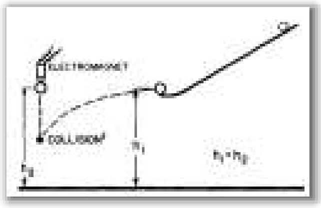
Ε.Α.Π.
ΚΦΕ51
2012-2013

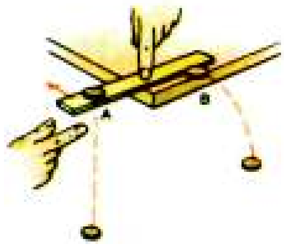
Αναστάσιος Νέζης
Α.Μ.: 81717

1η Εργασία

ΘΕΜΑ 1 / a.

» Σύμφωνα με το σχήμα 7-4 και με την *αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων*, δύο σώματα που εκτελούν από το ίδιο ύψος κινήσεις στο πεδίο βαρύτητας, μόνο υπό την επίδραση του βάρους τους, πέφτουν ίδια ύψη, σε ίδιους χρόνους. Ανεξάρτητα από το αν το ένα κάνει ελεύθερη πτώση ενώ το άλλο οριζόντια βολή, ο χρόνος της κατακόρυφης μετατόπισης είναι ο ίδιος. Γι' αυτό και τελικά υπάρει σύγκρουση στον αέρα.

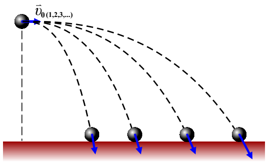




» Αντίστοιχο παράδειγμα είναι αυτό που φαίνεται στο διπλανό πείραμα. Με απότομη κίνηση χτυπάμε τον χάρακα, αναγκάζοντάς τον να περιστραφεί. Η κρούση στο νόμισμα Β το αναγκάζει να κάνει οριζόντια βολή. Το νόμισμα Α λόγω αδράνειας παραμένει "στιγμιαία" στη θέση του και χωρίς έδαφος - χάρακα στη συνέχεια κάνει ελεύθερη πτώση. Το "ταυτόχρονο" των δύο πτώσεων το αντιλαμβανόμαστε ως έναν και μοναδικό κρότο, από την πρόσκρουση των νομισμάτων στο έδαφος.

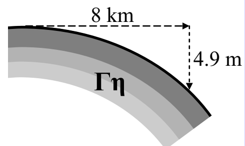
Τώρα το Φεγγάρι...

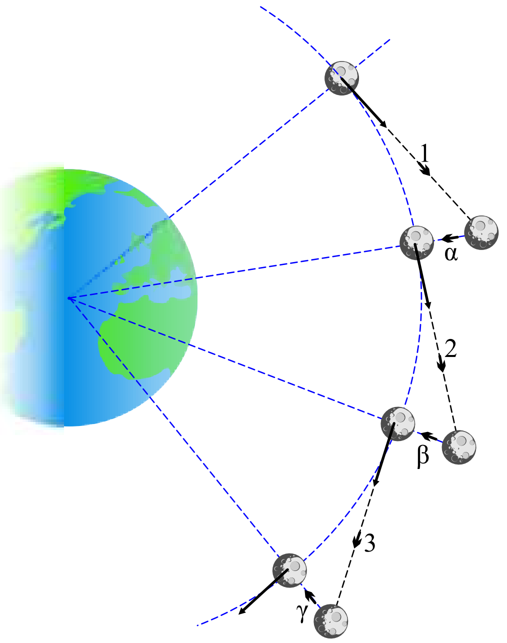
» Στο περίφημο σχέδιο του Νεύτωνα που φαίνεται δίπλα, έχουμε μια γραφική "απόδειξη" της δυνατότητας περιστροφής ενός αντικειμένου γύρω από τη Γη (εκμεταλευμόμενοι την τάση του για πτώση λόγω βαρύτητας και την όλο και αυξανόμενη αρχική οριζόντια ταχύτητά του).



Βλέπουμε ότι η γνωστή εικόνα του όλο και αυξανόμενου βεληνεκούς ενός βλήματος, αν αυξάνεται η αρχική του ταχύτητα, μετασχηματίζεται σε κινήσεις (πρακτικά είναι τμήματα ελλείψεων) που σιγά-σιγά προσομοιώνουν την καμπυλότητα της Γης, μέχρι του ορίου της τροχιάς.

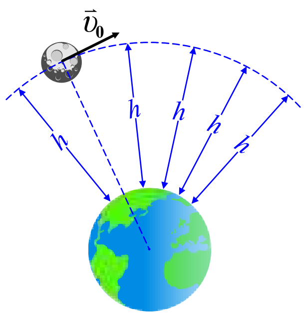
Με άλλα λόγια ένα αντικείμενο πέφτει προς τη Γη και παράλληλα μετατοπίζεται στην οριζόντια διεύθυνση . Όμως αυτή η οριζόντια διεύθυνση δεν είναι ευθεία, είναι καμπύλη (σφαιρική επιφάνεια της Γης). Αν λοιπόν η αρχική ταχύτητά του είναι τέτοια ώστε να πέφτει τόσο όσο "πέφτει" η Γη από κάτω του, δηλαδή όσο καμπυλώνεται η Γη, τότε το αντικείμενο θα διατηρεί σταθερό ύψος απότο έδαφος ίσο με το αρχικό ύψος. Για σημεία κοντά στην επιφάνεια της Γης έχουμε πτώση κατά 4.9 m κάθε 8 km οριζόντιας μετατόπισης.





» Το Φεγγάρι κάνει ακριβώς το ίδιο: i) η εφαπτομενική του ταχύτητα σε συνδιασμό με την αδράνειά του, το "ωθεί" στο να κινηθεί ευθύγραμμα και ομαλά (1,2,3,...), ii) το βάρος του (βαρυτική έλξη Γης στο Φεγγάρι) το "ωθεί" να κάνει ελεύθερη πτώση (α,β,γ,...)
Ο συνδιασμός αυτών των δύο κινήσεων μας δίνει την ομαλή καμπύλη τροχιά του.

» *Αλλιώς*: το Φεγγάρι εκτελεί οριζόντια βολή με ταχύτητα υ_0 από ύψος h ($\upsilon_0 \perp h$). Ο ρυθμός με τον οποίο πέφτει συμπίπτει με τον ρυθμό με τον οποίο καμπυλώνεται η Γη. Το σώμα πέφτει και η Γη "πέφτει" από κάτω του με τον ίδιο τρόπο. Έτσι διατηρεί πάντα ίδιο ύψος από το έδαφος ή την ίδια ακτίνα από το κέντρο της Γης.



ΘΕΜΑ 1 / b.

Ε.Ο.Κ.

- $\boxed{\upsilon(t) = \sigma\tau\alpha\theta.}$
- $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \upsilon \cdot dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \upsilon \cdot dt \xrightarrow{\upsilon=\sigma\tau\alpha\theta.} \upsilon \cdot \int_0^t dt \Rightarrow x - x_0 = \upsilon \cdot (t-0) \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + \upsilon t}$

Ε.Ο.Επ.Κ.

- $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow d\upsilon = a \cdot dt \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^t a \cdot dt \xrightarrow{a=\sigma\tau\alpha\theta.} a \cdot \int_0^t dt \Rightarrow \upsilon - \upsilon_0 = a \cdot (t-0) \Rightarrow \boxed{\upsilon(t) = \upsilon_0 + at}$ (1)

- $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \upsilon \cdot dt \xrightarrow{(1)} dx = (\upsilon_0 + at) \cdot dt = \upsilon_0 \cdot dt + at \cdot dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \upsilon_0 \cdot dt + \int_0^t at \cdot dt \xrightarrow{a,\upsilon_0=\sigma\tau\alpha\theta.}$

$$\longrightarrow \upsilon_0 \cdot \int_0^t dt + a \cdot \int_0^t t \cdot dt \Rightarrow x - x_0 = \upsilon_0 (t-0) + a \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^t \Rightarrow x - x_0 = \upsilon_0 t + a\left(\frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) \Rightarrow x - x_0 = \upsilon_0 t + a\frac{t^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2} \quad (2)$$

» Αν $a=f(t)$ (και όχι $a=\sigma\tau\alpha\theta.$) τότε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^t a \cdot dt \neq a \cdot \int_0^t dt \quad \& \quad \int_0^t at \cdot dt \neq a \cdot \int_0^t t \cdot dt$$

Έτσι οι τύποι μετά την ολοκλήρωση θα ήταν διαφορετικοί από τους (1) & (2).

παράδειγμα:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow d\upsilon = a(t) \cdot dt \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^t a(t) \cdot dt \xrightarrow[\ldots\ a=5t+2]{\acute{\varepsilon}\sigma\tau\omega\ldots} \upsilon - \upsilon_0 = \int_0^t (5t+2) \cdot dt \Rightarrow$$

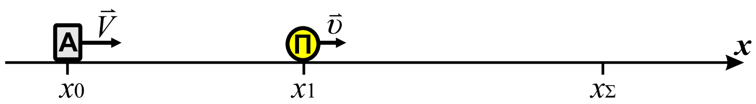
$$\Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 + \int_0^t 5t \cdot dt + \int_0^t 2 \cdot dt = \upsilon_0 + 5\int_0^t t \cdot dt + 2\int_0^t dt \Rightarrow \boxed{\upsilon = \upsilon_0 + 5\frac{t^2}{2} + 2t}$$

Αν όμως είχαμε την $\upsilon = \upsilon_0 + at$ και αντικαθιστούσαμε $a = 5t + 2$ θα βγάζαμε:

$\upsilon = \upsilon_0 + (5t+2)t \Rightarrow \boxed{\upsilon = \upsilon_0 + 5t^2 + 2t}$ ...που είναι λάθος!

ΘΕΜΑ 1 / c. / (i)

Για μεγαλύτερη (οπτική) σαφήνια θα συμβολίζω την ταχύτητα του αυτοκινήτου με V και του ποδηλάτου με υ.

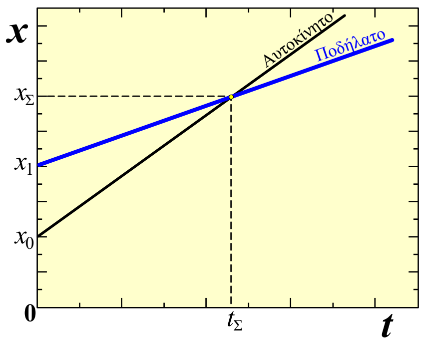


» Έστω x_Σ το σημείο συνάντησης - προσπέρασης

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + Vt \\ x_\Pi &= x_1 + \upsilon t \end{aligned}$$

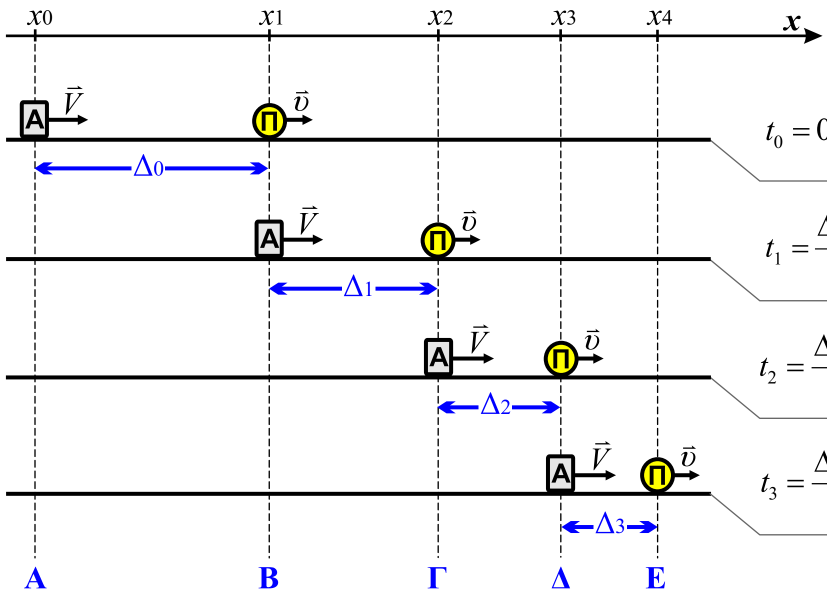
όταν: $x_A = x_\Pi = x_\Sigma \longrightarrow x_0 + Vt_\Sigma = x_1 + \upsilon t_\Sigma \Rightarrow Vt_\Sigma - \upsilon t_\Sigma = x_1 - x_0 \Rightarrow \boxed{t_\Sigma = \dfrac{x_1 - x_0}{V - \upsilon}}$

$$x_\Sigma = x_A(t_\Sigma) = x_0 + V\frac{x_1 - x_0}{V - \upsilon} = \frac{x_0(V - \upsilon) + V(x_1 - x_0)}{V - \upsilon} = \frac{\cancel{x_0 V} - x_0\upsilon + Vx_1 - \cancel{Vx_0}}{V - \upsilon} \Rightarrow \boxed{x_\Sigma = \frac{Vx_1 - \upsilon x_0}{V - \upsilon}}$$



» Επειδή $V > \upsilon$ η κλίση της ευθείας x-t του αυτοκινήτου θα είναι μεγαλύτερη από αυτήν του ποδηλάτου. Άρα οι δύο ευθείες θα τέμνονται σε κάποιο σημείο (x_Σ,t_Σ). Όταν η “ευθεία” του αυτοκινήτου βρεθεί πάνω από την “ευθεία” του ποδηλάτου τότε το αυτοκίνητο θα βρίσκεται σε μεγαλύτερα “x” απ’ το ποδήλατο, δηλαδή θα το έχει προσπεράσει.

ΘΕΜΑ 1 / c. / (ii)



Τα τρία πρώτα "βήματα" της άσκησης:

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = \frac{\Delta x_A}{V} = \frac{x_1 - x_0}{V} \quad (1) \quad \& \quad t_1 = \frac{\Delta x_\Pi}{\upsilon} = \frac{x_2 - x_1}{\upsilon} \quad (2)$$

$$t_2 = \frac{\Delta x'_A}{V} = \frac{x_2 - x_1}{V} \quad (3) \quad \& \quad t_2 = \frac{\Delta x'_\Pi}{\upsilon} = \frac{x_3 - x_2}{\upsilon} \quad (4)$$

$$t_3 = \frac{\Delta x''_A}{V} = \frac{x_3 - x_2}{V} \quad (5) \quad \& \quad t_3 = \frac{\Delta x''_\Pi}{\upsilon} = \frac{x_4 - x_3}{\upsilon} \quad (6)$$

$$(1):\ t_1 = \frac{x_1 - x_0}{V} = 1 \cdot \frac{x_1 - x_0}{V} \Rightarrow \boxed{t_1 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^0 \cdot \frac{x_1 - x_0}{V}} \quad \text{(I)}$$

$$(2):\ x_2 - x_1 = \upsilon t_1 \xrightarrow{(1)} x_2 - x_1 = \upsilon \frac{x_1 - x_0}{V} \quad (7)$$

$$(3):\ t_2 = \frac{x_2 - x_1}{V} \xrightarrow{(7)} t_2 = \frac{\upsilon \frac{x_1 - x_0}{V}}{V} = \frac{\upsilon}{V} \frac{x_1 - x_0}{V} \Rightarrow \boxed{t_2 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^1 \cdot \frac{x_1 - x_0}{V}} \quad \text{(II)}$$

$$(4):\ x_3 - x_2 = \upsilon t_2 \xrightarrow{(II)} x_3 - x_2 = \upsilon \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^1 \frac{x_1 - x_0}{V} \quad (8)$$

$$(5):\ t_3 = \frac{x_3 - x_2}{V} \xrightarrow{(8)} t_3 = \frac{\upsilon \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^1 \frac{x_1 - x_0}{V}}{V} = \frac{\upsilon}{V} \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^1 \frac{x_1 - x_0}{V} \Rightarrow \boxed{t_3 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^2 \cdot \frac{x_1 - x_0}{V}} \quad \text{(III)}$$

Από τις (I), (II), (III) επαγωγικά έχουμε:

$$t_1 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^0 \cdot \frac{x_1 - x_0}{V}$$

$$t_2 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^1 \cdot \frac{x_1 - x_0}{V}$$

$$t_3 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^2 \cdot \frac{x_1 - x_0}{V}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\boxed{t_n = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^{n-1} \cdot \frac{x_1 - x_0}{V}}$$

Από προηγούμενο σχήμα βλέπουμε:

t =0: $\Delta_0 = x_1 - x_0 \Rightarrow \Delta_0 = 1\cdot(x_1 - x_0) \Rightarrow \boxed{\Delta_0 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^0 \cdot (x_1 - x_0)}$

t_1 =0: $\Delta_1 = x_2 - x_1 \xrightarrow{(2)} \Delta_1 = \upsilon t_1 \xrightarrow{(\mathrm{I})} \Delta_1 = \upsilon \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^0 \frac{x_1 - x_0}{V} \Rightarrow \Delta_1 = \frac{\upsilon}{V}\cdot(x_1 - x_0) \Rightarrow \boxed{\Delta_1 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^1 \cdot (x_1 - x_0)}$

t_2 =0: $\Delta_2 = x_3 - x_2 \xrightarrow{(4)} \Delta_2 = \upsilon t_2 \xrightarrow{(\mathrm{II})} \Delta_2 = \upsilon \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^1 \frac{x_1 - x_0}{V} \Rightarrow \Delta_2 = \frac{\upsilon}{V}\left(\frac{\upsilon}{V}\right)^1 \cdot(x_1 - x_0) \Rightarrow \boxed{\Delta_2 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^2 \cdot (x_1 - x_0)}$

t_3 =0: $\Delta_3 = x_4 - x_3 \xrightarrow{(6)} \Delta_3 = \upsilon t_3 \xrightarrow{(\mathrm{III})} \Delta_3 = \upsilon \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^2 \frac{x_1 - x_0}{V} \Rightarrow \Delta_3 = \frac{\upsilon}{V}\left(\frac{\upsilon}{V}\right)^2 \cdot(x_1 - x_0) \Rightarrow \boxed{\Delta_3 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^3 \cdot (x_1 - x_0)}$

Από τις προηγούμενες σχέσεις, επαγωγικά έχουμε:

$$\Delta_0 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^0 \cdot (x_1 - x_0)$$

$$\Delta_1 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^1 \cdot (x_1 - x_0)$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^2 \cdot (x_1 - x_0)$$

$$\Delta_3 = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^3 \cdot (x_1 - x_0)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\boxed{\Delta_n = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^n \cdot (x_1 - x_0)}$$

Μετά από άπειρο αριθμό βημάτων: $n \to +\infty$

$$\Delta_n = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^n \cdot (x_1 - x_0) \Rightarrow$$

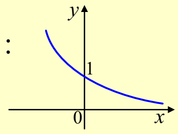
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \Delta_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{\upsilon}{V}\right)^n \cdot (x_1 - x_0)\right] =$$

$$= (x_1 - x_0)\cdot \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\upsilon}{V}\right)^n \Rightarrow$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} \Delta_n (x_1 - x_0)\cdot 0 = 0$$

Γνωρίζουμε ότι:
αν $0 < a < 1$ τότε :

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$



* Στο πρόβλημά μας:
$\upsilon < V \Rightarrow \frac{\upsilon}{V} < 1$ τότε :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\upsilon}{V}\right)^n = 0$$

» Για να βρούμε τον συνολικό χρόνο $t_{ολ.}$ και να αποδείξουμε ότι είναι πεπερασμένος, αρκεί να υπολογίσουμε το άθροισμα όλων των χρόνων t_n:

$$t_{ολ.} = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\upsilon}{V}\right)^{n-1} \cdot \frac{x_1 - x_0}{V} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\upsilon}{V}\right)^n \cdot \frac{\cancel{V}}{\upsilon} \cdot \frac{x_1 - x_0}{\cancel{V}} =$$

$$= \frac{x_1 - x_0}{\upsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\upsilon}{V}\right)^n \overset{*}{=} \frac{x_1 - x_0}{\upsilon}\cdot\frac{\frac{\upsilon}{V}}{1-\frac{\upsilon}{V}} =$$

$$= \frac{x_1 - x_0}{\upsilon}\cdot\frac{\frac{\upsilon}{V}}{\frac{V-\upsilon}{V}} = \frac{x_1 - x_0}{\cancel{\upsilon}}\cdot\frac{\cancel{\upsilon}}{V-\upsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{ολ.} = \frac{x_1 - x_0}{V-\upsilon}}$$

Χρόνος ανεξάρτητος του n, άρα πεπερασμένος. [ίδιο αποτέλεσμα με το **c.(i)**]

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\sum_{\infty} = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu + \cdots = \frac{a_1}{1-\lambda}$$

$$\text{όπου} : |\lambda| < 1 \text{ και } \lambda = \frac{a_2}{a_1}$$

* Στο πρόβλημά μας:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\upsilon}{V}\right)^n = \frac{\left(\frac{\upsilon}{V}\right)^1}{1-\lambda} = \frac{\frac{\upsilon}{V}}{1-\frac{\upsilon}{V}}$$

$$\lambda = \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^2 \Big/ \left(\frac{\upsilon}{V}\right)^1 = \frac{\upsilon}{V}$$

ΘΕΜΑ 1 / c. / (iii)

Παρατηρούμε ότι οι δύο μέθοδοι δίνουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα. Ως εκπαιδευτικός μέσης εκπαίδευσης, εννοείται ότι προτιμώ την πρώτη μέθοδο, η οποία λύνει πολύ πιο απλά το συγκεκριμένο πρόβλημα. Υποθέτω πως πιο πολύπλοκα προβλήματα θα λύνονται με μεθόδους ανάλογες της δεύτερης (η οποία μαθηματικοποιεί τελείως το πρόβλημα, στα όρια του παράδοξου του Ζίνωνος).

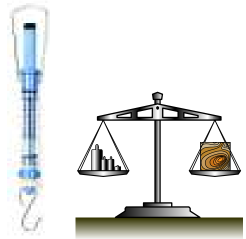
ΘΕΜΑ 2 / a.

ΜΑΖΑ: Ονομάζουμε ένα ενδογενές χαρακτηριστικό της ύλης στο οποίο αποδείδουμε δύο από τις ιδιότητές της: α) την *βαρυτική έλξη* και β) την *αδράνεια*.

α) Βαρυτική έλξη (νόμος παγκόσμιας έλξης): δύο μάζες πάντα έλκονται μεταξύ τους

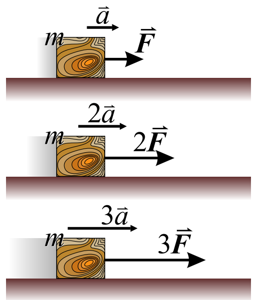
- *Βαρυτική μάζα*: η αιτία της βαρυτικής έλξης ($F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$) μεταξύ δύο σωμάτων.
- Το πηλίκο του βάρους ενός σώματος προς την επιτάχυνση της βαρύτητας του τόπου που το προκαλεί.

$$\boxed{m_{\beta\alpha\rho.} = \frac{w}{g}}$$



- Τη μετράμε είτε με δυναμόμετρο (ελατήριο, ν. Hooke) είτε με ζυγό (σύγκριση ροπών και χρήση πρότυπης μάζας).

β) Αδράνεια: η ιδιότητα των σωμάτων να τείνουν να διατηρούν την κινητική τους κατάσταση (και να αντιδρούν σε κάθε μεταβολή της).



- *Αδρανειακή μάζα*: το σταθερό πηλίκο της δύναμης *F*, που ασκείται σ' ένα σώμα, προς την επιτάχυνση *a* που αποκτά.

$$\boxed{m_{\alpha\delta\rho.} = \frac{F}{a}}$$

- Εκφράζει τη δυσκολία επιτάχυνσης ενός σώματος.
- **Είναι το μέτρο της αδράνειας ενός σώματος.**

Μέσω της ΑΔΟ μπορούμε να ορίσουμε την ισότητα δύο μαζών:

-ίσες μάζες είναι αυτές που όταν συκρούονται πλαστικά έχοντας ίσες ταχύτητες, δίνουν ακίνητο συσσωμάτωμα.

-Ίσες μάζες είναι αυτές που αν ένας εκρηκτικός μηχανισμός τις διαχωρίσει από την ηρεμία θα αποκτήσουν ταχύτητες ίσων μέτρων.

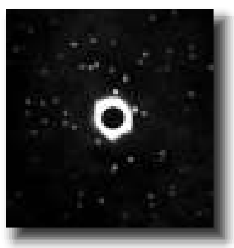
Από την απόδειξη για την απλή αρμονική ταλάντωση ενός απλού εκκρεμούς έχουμε: $T = 2\pi\sqrt{m_{\alpha\delta\rho.}\ell / m_{\beta\alpha\rho.}g}$ (1) και μόνο αν υποθέσουμε ότι $m_{\alpha\delta\rho.}=m_{\beta\alpha\rho.}$ παίρνουμε τον γνωστό τύπο $T = 2\pi\sqrt{\ell / g}$ (2). Ο *Νεύτωνας* επινόησε ένα πείραμα για άμεσο έλεγχο αυτής της υπόθεσης: κατασκεύασε ένα απλό εκκρεμές με σώμα ένα κούφιο σφαιρίδιο. Μέσα στο σφαιρίδιο έβαλε διάφορα σώματα, όλα ίδιας βαρυτικής μάζας (τις είχε ζυγίσει με ζυγό) και μέτρησε τις περιόδους. Τις βρήκε όλες ίδιες. Αν υπήρχε διαφορά $m_{\alpha\delta\rho.} \neq m_{\beta\alpha\rho.}$ τότε για ίδιες $m_{\beta\alpha\rho.}$ θα είχε διαφορετικές $m_{\alpha\delta\rho.}$ (διαφορετικά σώματα ίδιου βάρους). Έτσι ο τύπος (1) δεν θα έδινε τον τύπο (2). Από την ταύτιση όλων των περιόδων συμπέρανε ότι τα δύο είδη μάζας είναι ένα.
Το 1909 ο *Etövös* επινόησε μια συσκευή που μας επέτρεψε να σιγουρευτούμε για την ισότητα των δύο μαζών με μεγάλη ακρίβεια. Μεγαλύτερη ακόμα ακρίβεια πέτυχαν οι *R.H. Dicke* et al. το 1964.

Σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας η μάζα ενός σώματος αλλάζει όταν αυτό κινείται:

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}} \qquad m \xrightarrow{\upsilon \ll c} m_0 \qquad m \xrightarrow{\upsilon \approx c} \infty$$

...όπου m_0 η μάζα ηρεμίας του σώματος

Η τροποποίηση του βαρυτικού νόμου από τον Einstein αποδείδει “μάζα” και στο φως (ισοδυναμία μάζας - ενέργειας), κάτι που έχει επιβεβαιωθεί και πειραματικά με την βαρυτική έλξη ακτίνων φωτος από πολύ μαζικά αντικείμενα (παρατήρηση εκτροπής θέσης αστέρων στη διάρκεια ολικής έκλειψης Ηλίου).



ΒΑΡΟΣ: Η δύναμη που ασκεί η Γη στα σώματα και η οποία είναι έκφραση του νόμου της παγκόσμιας έλξης με το ένα σώμα να είναι η Γη.

$$\boxed{w = G\frac{M_{ΓΗΣ} \cdot m}{r^2} = mg} \quad με \quad \boxed{g = G\frac{M_{ΓΗΣ}}{r^2}} \quad (r \geq R_{ΓΗΣ})$$

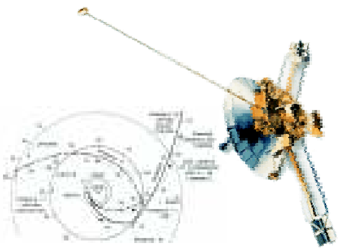
» Πρόκειται για μια από τις τρεις θεμελειώδεις δυνάμεις στη φύση (βαρυτική / ηλεκτρασθενής / ισχυρή πυρηνική).
» Ως βαρυτική δύναμη είναι υπεύθυνη για τις κινήσεις των ουρανίων σωμάτων και τον σχηματισμό ηλιακών συστημάτων, αστρικών σμηνών, γαλαξιών κλπ.
» Συγκριτικά με τις άλλες δυνάμεις είναι πολύ ασθενής δύναμη (π.χ. σε σχέση με την ηλεκτρική δύναμη είναι 10^{42} φορές ασθενέσθερη).

ΑΔΡΑΝΕΙΑ: Η ιδιότητα της ύλης να αντιστέκεται στην όποια αλλαγή της κινητικής της κατάστασης.

» Προτάθηκε από τον Γαλιλαίο ως αρχή της αδράνειας: **"ένα σώμα διατηρεί την αρχική του κινητική κατάσταση αν παραμείνει αδιατάρακτο"** (ακινητεί αν ακινητούσε ή εκτελεί ΕΟΚ αν κινούνταν).
» Επαναδιατυπώθηκε από τον Νεύτωνα ως 1ος νόμος της κίνησης.

Την εποχή που πρωτοδιατυπώθηκε η αρχή της αδράνειας, μόνο κατά προσέγγιση μπορούσε κάποιος να πραγματοποιήσει ΕΟΚ (όταν ΣF=0). Ο Γαλιλαίος το επιχείρησε αφήνοντας μικρές σφαίρες από κεκλιμένο επίπεδο να συνεχίσουν σε οριζόντιο δρόμο με την ίδια αρχική ταχύτητα. Άλλαζε όμως τους οριζόντιους δρόμους: ξεκίνησε με χώμα, πλακόστρωτο, μάρμαρο και κατέληξε σε πάγο. Με μοναδική οριζόντια δύναμη την τριβή, όσο αυτή μίκραινε το σώμα έφτανε όλο και μακρύτερα. Το πνευματικό άλμα ήταν προφανές: στο όριο του Τ=0 δηλαδή όταν ΣF=0 το σώμα δεν θα σταμάταγε ποτέ, θα εκτελούσε δηλαδή ΕΟΚ.

Στη σημερινή εποχή, εδώ και τουλάχιστον 10 χρόνια γνωρίζουμε τουλάχιστον ένα αντικείμενο που εκτελεί ΕΟΚ (με ΣF=0) με πολύ καλή ακρίβεια. Είναι το διαστημόπλοιο Pioneer-10 (που εκτοξεύτηκε από τη NASA στις 2/3/72) το οποίο ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα 44520 km/h, ευθύγραμμα προς το μάτι του Ταύρου (το άστρο Αλντεμπαράν). Βρίσκεται σε απόσταση περίπου 90 AU από τον Ήλιο μας και οι βαρυτικές έλξεις που δέχεται από τα γειτονικά ουράνια σώματα είναι πρακτικά μηδέν. Η κίνησή του είναι ότι πιο κοντινό σε αυτό που φαντάστηκε ο Γαλιλαίος.



ΟΡΜΗ: Ως ορμή ορίζουμε το γινόμενο μάζας επί την ταχύτητα ενός σώματος. $\boxed{\vec{p} = m\vec{\upsilon}}$
Είναι διανυσματικό μέγεθος με κατεύθυνση αυτή της ταχύτητας.

» **Ο λόγος που ορίζουμε το γινόμενο *mυ* ως ένα ξεχωριστό μέγεθος είναι επειδή** κατά τις αλληλεπιδράσεις των σωμάτων (*κρούσεις*: ελαστικές, ανελαστικές, πλαστικές, *εξ-αποστάσεως δυνάμεις*, …) **το διανυσματικό άθροισμα** των γινομένων $m_i\upsilon_i$ των εμπλεκόμενων σωμάτων, **διατηρείται σταθερό**. Έχουμε λοιπόν την Αρχή Διατήρησης της Ορμής (ΑΔΟ) ως άμεση συνέπεια του 3ου νόμου του Νεύτωνα: $\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1} \Rightarrow \boxed{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_1\vec{\upsilon}_1 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_1\vec{\upsilon}_1'}$

» Συσχετισμός ορμής - δύναμης:

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Αρχική διατύπωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα από τον ίδιο τον Νεύτωνα στα Principia.

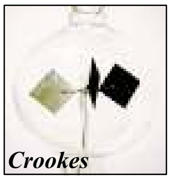
» Όταν οι ταχύτητες των σωμάτων προσεγγίζουν σχετικιστικά όρια τότε ο τύπος της ορμής μετασχηματίζεται σε: $\boxed{\vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}}$ …με: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$

σχετικιστική μάζα

» Επειδή τίποτα στη φύση δεν διαδίδεται ακαριαία (όπως πίστευε ο Νεύτωνας) αλλά υπαρχει ανώτατο όριο ταχύτητας $c_0 = 3 \cdot 10^8 \; m/s$, οποιαδήποτε αλληλεπίδραση μεταξύ των σωμάτων διαδίδεται εξ' αποστάσως με αυτή την ταχύτητα. Έτσι αν ένα φορτίο κινηθεί σε μια περιοχή, ένα άλλο φορτίο (έστω ότι τα δύο αποτελούν μονωμένο σύστημα) θα "καταλάβει" την κίνηση του πρώτου μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = S/c_0$, όπου S η απόστασή τους. Σε αυτό το μεσοδιάστημα Δt ενώ έχει μεταβληθεί η ορμή του πρώτου, το δεύτερο παραμένει ακίνητο. Έχουμε λοιπόν μια στιγμιαία (για χρόνο Δt) "απώλεια" ορμής. Για να αποφύγουμε αυτή την ασυμφωνία αποδίδουμε στο ηλεκτρομαγνητικό κύμα (που είναι ο φορέας της ηλεκτρικής δύναμης από το ένα φορτίο στο άλλο ορμή και έστι λέμε ότι το Η/Μ κύμα (ή πεδίο) μεταφέρει ορμή. Έχουμε λοιπόν διατήρηση της ορμής και σε αυτήν την περίπτωση, αποδίδοντας ορμή στο πεδίο.

» Και το φως (ως Η/Μ κύμα) μεταφέρει ορμή. Προσπίπτωντας σε ένα σώμα, του μεταφέρει ορμή ή του ασκεί δύναμη (πίεση ακτινοβολίας).

Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό από το ακτινόμετρο. Η αρχική ερμηνία του Crookes (με την οποία συμφώνησε και ο Maxwell) ήταν πως στα λευκά πτερύγια το φως ανακλάται (αναπηδά) και άρα η μεταβολή της ορμής του (και η δύναμη *F=dp/dt*) είναι μεγαλύτερη από αυτήν στα μαύρα πτερύγια, στα οποία το φως απορροφάται. Έτσι το ακτινόμετρο γυρίζει συνέχεια. Αύτο δεν συνέβενε στη συσκεύη του Crookes για άλλους λόγους, όμως συνέβη στη συσκευή των Nichols και Hull ακριβώς όπως το προέβλεπε η Η/Μ θεωρία του Maxwell.



» Στην κβαντική φυσική, που οι ταχύτητες δεν είναι απόλυτα καθορισμένες και τα σωματίδια περιγράφονται και ως κύματα, η ορμή ορίζεται ως ο αριθμός των κυμάτων ανά μονάδα μήκους.

ΔΥΝΑΜΗ: Η αιτία μπου μπορεί να <u>παραμορφώσει</u> (*) ένα σώμα ή να αλλάξει την <u>κινητική του κατάσταση</u> (**).

(*) συνδέεται με την πίεση (*p=F/A*)
(**) επιτάχυνση (*a=F/m*)
ισορροπία (*ΣF=0*)
περιστροφή (*τ=Fd*)

» Ασκείται: i) με επαφή (σχοινιά, κρούσεις, ελατήρια, ...)
ii) από απόσταση (βαρύτητα, ηλεκτρικές, ...)

» Στην πραγματικότητα, επειδή οι θεμελειώδεις δυνάμεις στη φύση είναι τρεις (βαρυτική, ηλεκτρασθενής, ισχυρή πυρηνική) και αυτές ασκούνται από απόσταση, δεν υπάρχουν δυνάμεις από επαφή. Για παράδειγμα, η τριβή σχετίζεται με την αλληλοεπικάλυψη των τροχιακών των ατόμων επιφανείας των δύο τριβόμενων επιφανειών, είναι δηλαδή κυρίως ηλεκτροστατική δύναμη.

» Υπάρχουν πολλοί νόμοι για τις δυνάμεις (νόμοι Νεύτωνα, νόμος παγκόσμιας έλξης, νόμος Coulomb, δύναμη Lorentz, ...)

» Βασικός τύπος χρήσης των δυνάμεων (για τον υπολογισμό των εξισώσεων κίνησης μέσω αυτών) είναι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{\upsilon} \xrightarrow{m=\sigma\tau\alpha\theta.} \vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{a}$$

η δύναμη είναι η αιτία που κρύβεται πίσω από την επιτάχυνση ενός σώματος

» Στα όρια της ακρίβειας που έχουμε για τις μετρήσεις των πραγμάτων (μάζες, επιταχύνσεις, κλπ) αυτός είναι και ο καλύτερος, μέχρι στιγμής, τρόπος μέτρησης μιας δύναμης.

» <u>Ψευδοδυνάμεις</u>: δυνάμεις που "εμφανίζονται" στο εσωτερικό μη αδρανειακών συστημάτων ώστε να εξηγηθούν από τους κινούμενους παρατηρητές, φαινόμενα χωρίς προφανή αιτία (φυγόκεντρος Coriollis, ...)

ΘΕΜΑ 2 / b.

1ος Νόμος του Newton
ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Όταν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σ' ένα σώμα είναι μηδέν, τότε το σώμα **ισορροπεί**, δηλαδή ακινητεί αν ακινητούσε ή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, αν κινούνταν.

$$\underset{\text{ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ}}{\Sigma\vec{F}=0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\upsilon}=0 & \text{(Ακινησία)} \\ \text{ή} \\ \vec{\upsilon}=\text{σταθ.(ΕΟΚ)} \end{cases}$$

» Διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Γαλιλαίο.

» Έχει εφαρμογή σε περιπτώσεις όπως του *Pioneer*-10 (όπου δεν υπάρχουν δυνάμεις, άρα ΣF=0) και σε πιο απλές περιπτώσεις όπως της ευθύγραμμης κίνησης ενός αυτικινήτου με σταθερή ταχύτητα (όπου υπάρχουν δυνάμεις αλλά ΣF=0).

Μας εισάγει την θεμελειώδη ιδιότητα της ύλης, την αδράνεια, η οποία με μέτρο της τη μάζα του σώματος, καθορίζει το πόσο δύσκολα θα αλλάξει η κινητική κατάσταση του σώματος, όταν πάψει να ισχύει το ΣF=0.

2ος Νόμος του Newton
ΘΕΜΕΛΕΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Όπως διατυπώθηκε από τον ίδιο τον Νεύτωνα:

"Η μεταβολή στην ποσότητα κίνησης ενός σώματος είναι ανάλογη της εφαρμοζόμενης δύναμης και συμβαίνει κατά τη διεύθυνση της δύναμης...

...Η ποσότητα της κίνησης είναι ανάλογη της μάζας του σώματος και της ταχύτητάς του"

Ή με τη σημερινή γλώσσα:
η συνισταμένη των δυνάμεων που δρούν σ' ένα σώμα ισούται (και διανυσματικά) με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του.

$$\boxed{\Sigma\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}}$$

» Γενική περίπτωση: $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\dfrac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}=m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\dfrac{dm}{dt}\vec{\upsilon}$

» Περίπτωση m=σταθ.: $\dfrac{dm}{dt}=0 \Rightarrow \vec{F}=m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F}=m\vec{a}}$

» Αν λύσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς την επιτάχυνση, έχουμε έναν ακόμα ορισμό για τον 2ο νόμο:
η επιτάχυνση ενός σώματος είναι ανάλογη (και διανυσματικά) της συνισταμένης δύναμης και αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του σώματος.

$$\boxed{\vec{a}=\frac{\Sigma\vec{F}}{m}}$$

» Σε 3 διαστάσεις ο 2ος νόμος γίνεται:

$$F_x=m\frac{d\upsilon_x}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}=ma_x$$
$$F_y=m\frac{d\upsilon_y}{dt}=m\frac{d^2y}{dt^2}=ma_y$$
$$F_z=m\frac{d\upsilon_z}{dt}=m\frac{d^2z}{dt^2}=ma_z$$

όπου F_x, F_y, F_z οι τρεις συνιστώσες της δύναμης στο χώρο.

3ος Νόμος του Newton
ΝΟΜΟΣ ΔΡΑΣΗΣ - ΑΝΤΙΔΡΑΣΗΣ

Όταν ένα σώμα ασκεί δύναμη σ'ένα άλλο σώμα (δράση), τότε και το άλλο σώμα ασκεί δύναμη ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς στο πρώτο σωμα (αντίδραση).

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

- Σε κάθε δράση αντιστοιχεί μία αντίδραση.
- Όλες οι δυνάμεις στη φύση είναι σε ζεύγη.
- Δεν υπάρχει διάκριση ανάμεσα σε δράση και αντίδραση (ονομάζουμε όποια θέλουμε *δράση* και η άλλη θα είναι η *αντίδραση*).
- Η δράση και η αντίδραση (αν και ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης) δεν αλληλοεξουδετερώνονται, γιατί ασκούνται σε διαφορετικά σώματα.
- Μόνο αν θεωρήσουμε σύστημα σωμάτων, τότε οι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος έχουν τις αντιδράσεις τους επίσης εσωτερικές και εξουδετερώνονται. Γι' αυτό σε ένα σύστημα σωμάτων πάντα $\Sigma F_{\varepsilon\sigma\omega\tau.}=0$.

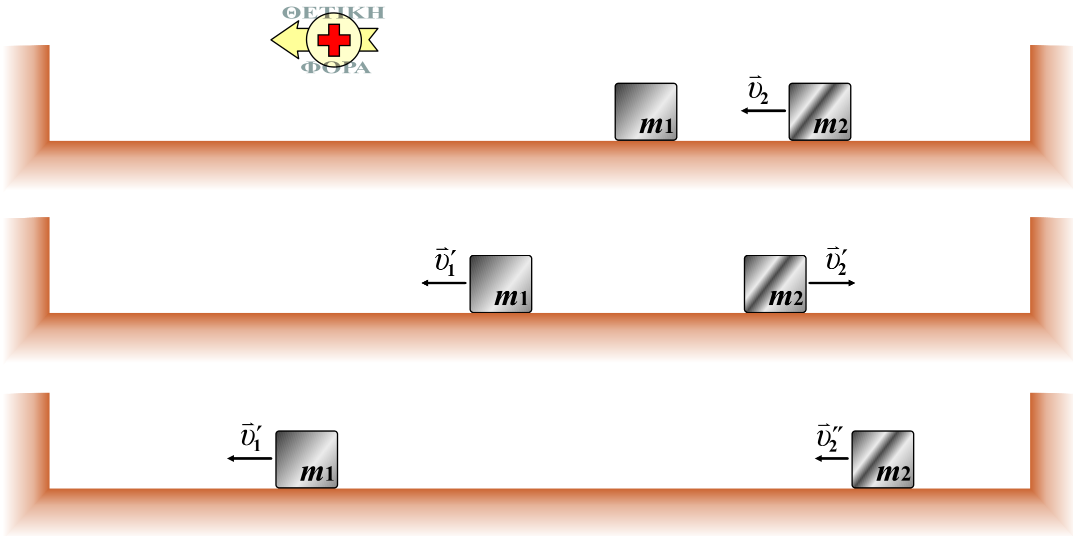
Άμεση συνέπεια του 3ου νόμου είναι η Αρχή Διατήρηση της Ορμής:

3ος νόμος — ΑΔΟ

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d(\vec{p}_1+\vec{p}_2)}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{σταθερό}$$

νόμος Newton	μεγέθη που εμπλέκονται
1ος	Μάζα Αδράνεια Δύναμη (*με την έννοια της μηδενικής συνισταμένης*)
2ος	Μάζα Αδράνεια (*με την έννοια της δυσκολίας επίτευξης μιας επιτάχυνσης από συγκεκριμένη δύναμη*) Δύναμη (*ως συνισταμένης*) Ορμή (*με την έννοια του ρυθμού μεταβολής της*)
3ος	Δύναμη (*με την έννοια της αλληλεπίδρασης*) Ορμή (*με την έννοια της αρχής διατήρησης*)

ΘΕΜΑ 2 / c. / (i)



Αρχικά

Μετά την 1Η κρούση m_1-m_2

Μετά την 2Η κρούση m_2-τοίχος

Στο πρόβλημά μας, με θετική φορά προς τ'αριστερά:

$$\underline{\text{ΑΔΟ}}:\ \vec{p}_{\text{ΟΛ.}} = \vec{p}\,'_{\text{ΟΛ.}} \Rightarrow \cancelto{0}{\vec{p}_1} + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \Rightarrow p_2 = p_1' + p_2' \Rightarrow m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \qquad (1)$$

$$\underline{\text{ΑΔΚΕ}}:\ \text{K}_{\text{ΟΛ.}} = \text{K}'_{\text{ΟΛ.}} \Rightarrow \cancelto{0}{\text{K}_1} + \text{K}_2 = \text{K}_1' + \text{K}_2' \Rightarrow \tfrac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \longrightarrow \boxed{\upsilon_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\upsilon_2} \quad \& \quad \boxed{\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_2 + m_1}\upsilon_2}$$

Το σύστημα των δύο σωμάτων είναι μονωμένο. Οι μοναδικές εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται είναι τα βάρη και οι αντιδράσεις του δαπέδου, που λόγω ισορροπίας στον y-άξονα αλληλοεξουδετερώνονται. Για την κρούση τοίχου - m_2 ισχύει το ίδιο με τον τοίχο απλά να θεωρείται άπειρη μάζα. Έτσι έχουμε σε ισχύ την Αρχή διατήρησης της Ορμής (ΑΔΟ) και την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (ΑΔΜΕ) που λόγω σταθερού επιπέδου διεξαγωγής του πειράματος μετατρέπεται σε απλή Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας (ΑΔΚΕ)

» 1Η Κρούση: $\upsilon_2' = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\upsilon_2 \quad \left(m_2 < m_1 \ \Rightarrow\ \upsilon_2' < 0 \longrightarrow \upsilon_2' : \textit{προς τα δεξιά}\right)$

$$\boxed{\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_2 + m_1}\upsilon_2} \quad \left(\upsilon_1' > 0 \longrightarrow \upsilon_1' : \textit{προς τ'αριστερά}\right)$$

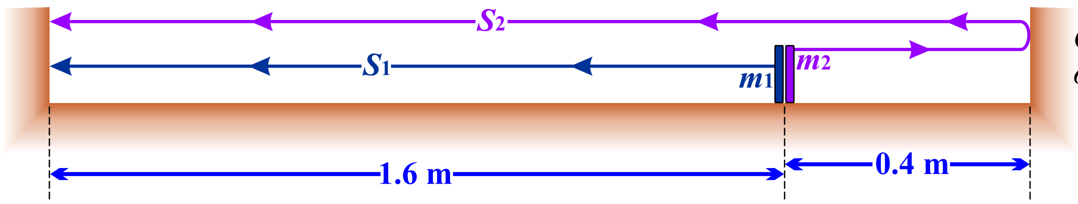
» 2Η Κρούση: $\upsilon_2'' = \dfrac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\upsilon_2' \xrightarrow{m_3 >> m_2} \upsilon_2'' = \dfrac{-m_3}{m_3}\upsilon_2' \Rightarrow \upsilon_2'' = -\upsilon_2' = -\dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\upsilon_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_2'' = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1}\upsilon_2} \quad \left(m_2 < m_1 \ \Rightarrow\ \upsilon_2'' > 0 \longrightarrow \upsilon_2'' : \textit{προς τ'αριστερά}\right)$$

Για να κινούνται και τα δύο προς τ'αριστερά με την ίδια ταχύτητα θα πρέπει:

$$\upsilon_1' = \upsilon_2'' \Rightarrow \frac{2m_2}{\cancel{m_2 + m_1}}\cancel{\upsilon_2} = \frac{m_1 - m_2}{\cancel{m_2 + m_1}}\cancel{\upsilon_2} \Rightarrow 2m_2 = m_1 - m_2 \Rightarrow 2m_2 + m_2 = m_1 \Rightarrow 3m_2 = m_1 \Rightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = 3}$$

ΘΕΜΑ 2 / c. / (ii)



Θεωρώντας τα αμαξίδια, αμεληταίων διαστάσεων

» Για να υπάρξει 2η σύγκρουση m_1-m_2, πριν το m_1 χτυπήσει στον αριστερό τοίχο, θα πρέπει $\upsilon_2'' > \upsilon_1'$ (αλλά μέσα στα όρια των 1.6+0.2+0.2= 2.0 m)

$$\upsilon_2'' > \upsilon_1' \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{\cancel{m_2 + m_1}}\cancel{\upsilon_2} > \frac{2m_2}{\cancel{m_2 + m_1}}\cancel{\upsilon_2} \Rightarrow m_1 - m_2 > 2m_2 \Rightarrow m_1 > 3m_2 \Rightarrow m_2 < \frac{m_1}{3} \Rightarrow \boxed{m_2 < 1/3\ kg} \quad (1)$$

» Τα δύο σώματα πρέπει να φτάσουν στον αριστερό τοίχο, οριακά ταυτόχρονα. Ή πιο σωστά για να προλάβει να συγκρουστεί το m_2 (με ο m_1) θα πρέπει να φτάσει σε μικρότερο ή ίσο χρόνο απ' ότι το m_1, στον τοίχο:

$$t_2 \le t_1 \Rightarrow \frac{S_2}{\upsilon_2''} \le \frac{S_1}{\upsilon_1'} \Rightarrow \frac{2.4}{\frac{m_1 - m_2}{\cancel{m_2 + m_1}}\cancel{\upsilon_2}} \le \frac{1.6}{\frac{2m_2}{\cancel{m_2 + m_1}}\cancel{\upsilon_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.4}{1 - m_2} \le \frac{1.6}{2m_2} \Rightarrow 4.8m_2 \le 1.6 - 1.6m_2 \Rightarrow 6.4m_2 \le 1.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 \le \frac{1.6}{6.4} \Rightarrow \boxed{m_2 \le \frac{1}{4}\ kg} \qquad \left[(1):\ m_2 < 1/3\right]$$

Εφόσον $m_3 \to \infty$ και η κρούση του m_2 στον τοίχο γίνεται χωρίς απώλεια ενέργειας, μπορούμε να πούμε ότι όλη η **κόκκινη** διαδρομή (S_2) γίνεται με σταθερή ταχύτητα (κατά μέτρο). Η διαδρομή S_2 είναι: S_2=0.4+0.4+1.6= 2.4 m

Για τη συνολική διαδρομή S_2 παίρνουμε ως ταχύτητα την υ_2'' που είναι θετική για να μην παρουσιαστεί πρόβλημα με το πρόσημο.

ΘΕΜΑ 2 / c. / (iii)

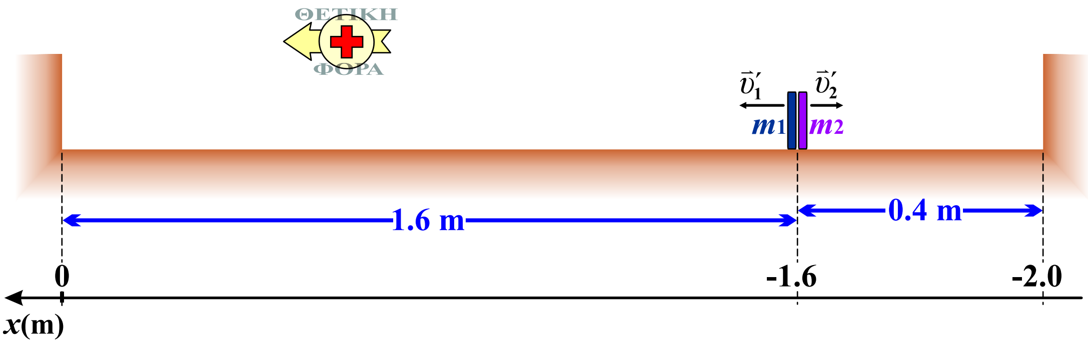
$m_1 = 1\ kg$

$m_2 = 0.5\ kg$

$\upsilon_2 = 0.5\ m/s$

▶ *Μετά την πρώτη κρούση*: $\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_2 + m_1}\upsilon_2 = \frac{2 \cdot 0.5}{0.5 + 1} \cdot 0.5 = \frac{0.5}{1.5} \Rightarrow \boxed{\upsilon_1' = \frac{1}{3}\ m/s}$

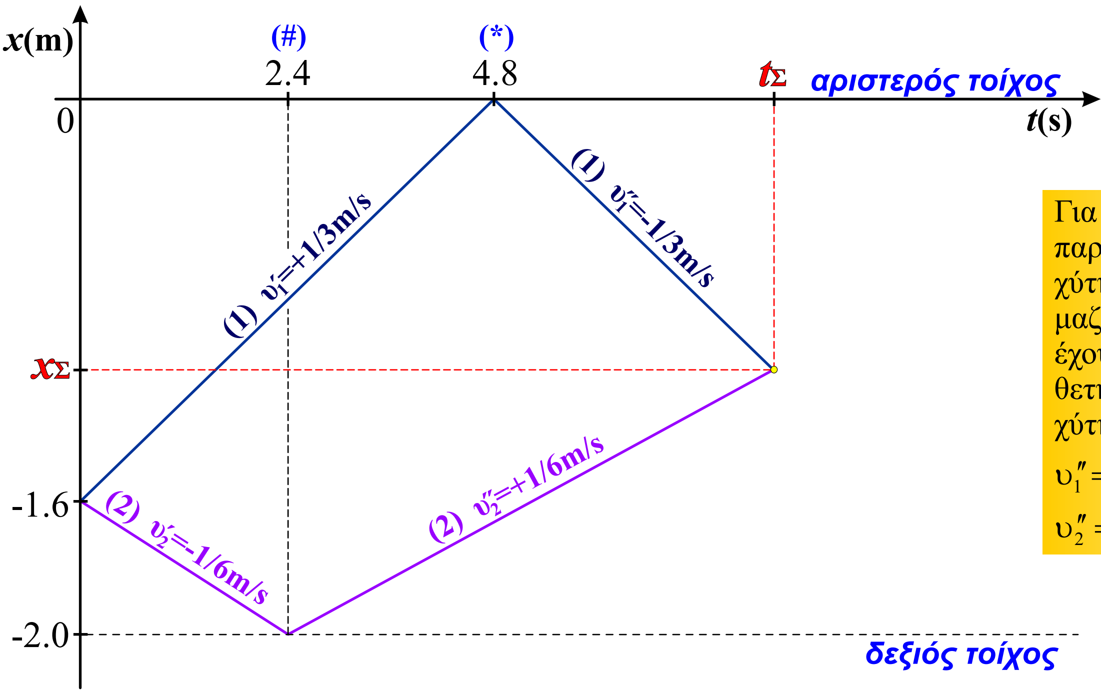
$$\upsilon_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\upsilon_2 = \frac{0.5 - 1}{0.5 + 1} \cdot 0.5 = \frac{-0.25}{1.5} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2' = -\frac{1}{6}\ m/s}$$



▶ *Εξισώσεις κίνησης*:

$x_1 = x_{01} + \upsilon_1' t \Rightarrow \boxed{x_1 = -1.6 + \frac{1}{3}t}$ | $x_1 = 0 \Rightarrow (1/3)t = 1.6 \Rightarrow \boxed{t = 4.8\ \sec}$ (*)

$x_2 = x_{02} + \upsilon_2' t \Rightarrow \boxed{x_2 = -1.6 - \frac{1}{6}t}$ | $x_2 = -2 \Rightarrow -2 = -1.6 - (1/6)t \Rightarrow$
$\Rightarrow (1/6)t = 0.4 \Rightarrow \boxed{t = 2.4\ \sec}$ (#)



Για λόγους που αναφέραμε παραπάνω ($m_3 \to \infty$) οι ταχύτητες ανάκρουσης των μαζών από τους τοίχους θα έχουν ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση με τις ταχύτητες πρόσκρουσης:

$$\upsilon_1'' = -\upsilon_1' = -1/3\ m/s$$

$$\upsilon_2'' = -\upsilon_2' = +1/6\ m/s$$

▶Μετά τις κρούσεις στους τοίχους [(*): 4.8 sec και (#): 2.4 sec] οι εξισώσεις που περιγράφουν τις κινήσεις όπως συνάγονται από το διάγραμμα είναι:

$$x_1 = x_{01} + \upsilon_1''(t-4.8) = 0 - \frac{1}{3}(t-4.8) \Rightarrow \boxed{x_1 = -\frac{1}{3}(t-4.8)}$$

$$x_2 = x_{02} + \upsilon_2''(t-2.4) = -2 + \frac{1}{6}(t-2.4) \Rightarrow \boxed{x_2 = -2 + \frac{1}{6}(t-2.4)}$$

συνάντηση έχουμε όταν $x_1 = x_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}(t-4.8) = -2 + \frac{1}{6}(t-2.4) \Rightarrow -\frac{1}{3}t + 1.6 = -2 + \frac{1}{6}t - 0.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.6 + 2 + 0.4 = \frac{1}{6}t + \frac{1}{3}t \Rightarrow 4 = \frac{1}{2}t \Rightarrow \boxed{t_\Sigma = 8\ \text{sec}}$$

...και $x_\Sigma = x_1 = -\frac{1}{3}(8-4.8) = -\frac{1}{3}3.2 \Rightarrow \boxed{x_\Sigma = -\frac{16}{15}\ m = -1.066\ m}$

...επιβεβαίωση $x_\Sigma = x_1 = -2 + \frac{1}{6}(8-2.4) = -2 + \frac{1}{6}5.6 = -2 + \frac{14}{15} = -\frac{16}{15}\ m = -1.066\ m$

ΘΕΜΑ 3 / a.

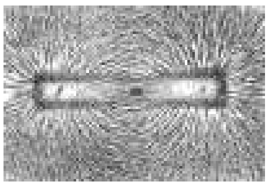
» Σύγκριση βαρυτικής δύναμης και δύναμης τριβής:

Βαρυτική Δύναμη	***Δύναμη Τριβής***
$w = G\frac{Mm}{r^2}$ $w = mg$	$T = \mu N$ $T = k\upsilon$ $T = c\upsilon^2$
Θεμελειώδης	Παράγωγη (κυρίως ηλεκτροστατικής φύσεως)
Συντηρητική	Μη συντηρητική
Φορέας πεδίου	Δεν ορίζεται πεδίο
Πλήρως κατανοητός νόμος (υπάρχει λόγω του ενδογενούς χαρακτηριστικού της ύλης: μάζα)	Όχι πλήρως κατανοητός νόμος (σήμερα) (ξεκινώντας από τις αλληλοεπικαλύψεις των μικροανωμαλιών και προχωρώντας στην παραμόρφωση των προεξοχών σε ατομικό επίπεδο, την δημιουργία ταλαντώσεων, κυμάτων και τέλος θερμότητας. Στη συνέχεια φαινόμενα όπως η τρομακτική αύξηση της τριβής σε τελείως λείες μεταλλικές επιφάνειες, η ανεξαρτησία της από το εμβαδόν στα στερεά και η εξάρτησή της στα λάστιχα και η ανεξαρτησία της από την ταχύτητα για μικρές ταχύτητες και η εξάρτησή της για μεγάλες). [Bowden & Tabor]
Απλός νόμος σε όλες του τις εφαρμογές (από τα δύο σώματα, που λύνεται αναλυτικά μέχρι τα τρία και πάνω σώματα που λύνεται αριθμητικά)	Σύνθετος νόμος που γίνεται όλο και πιο σύνθετος όσο πηγαίνουμε σε πιο πολύπλοκες καταστάσεις (σώμα στο έδαφος → σφαίρα στον αέρα → αεροπλάνο...)

ΘΕΜΑ 3 / b.

Σε περιπτώσεις αλληλεπίδρασης ενός σώματος με πολλά άλλα είναι προτιμότερο, από μαθηματικής απόψεως, να βρίσκουμε το πεδίο που δημιουργούν τα πολλά και να μελετάμε την κίνηση (και τις αλληλεπιδράσεις) του ενός, στο πεδίο των πολλών. Όταν οι νόμοι των δυνάμεων είναι απλοί, τότε η περιγραφή των φαινομένων με δυνάμεις ή με πεδία είναι το ίδιο απλή. Όσο όμως οι δυνάμεις γίνονται όλο και πιο πολύπλοκες (πχ πυρηνικές δυνάμεις), φαινεται πως τα πεδία αποκτούν έναν πραγματικό χαρακτήρα σχεδόν ανεξάρτητο από τα αντικείμενα που τα δημιουργούν.

➪ *Όταν ρίχνουμε ρινίσματα σιδήρου πάνω σε χαρτόνι το οποίο είναι οριζόντια τοποθετημένο πάνω από ραβδόμορφο μαγνήτη, αυτά "πάνε και κάθονται" σε καθορισμένες θέσεις σχηματίζοντας μια εικόνα σαν τη διπλανή. Η περιγραφή ενός τέτοιου φαινομένου με όρους δυνάμεων θα ήταν πρακτικά αδύνατη λόγω του τεράστιου αριθμού μεταβλητών που υπεισέρχονται. Έτσι ο Faraday σκέφτηκε να εισάγει την έννοια του πεδίου, ως αλλοίωση - παραμόρφωση του χώρου. Τα ρινίσματα ακολουθούν τις καθορισμένες διαδρομες που επιβάλει ο αλλοιωμένος χώρος.*

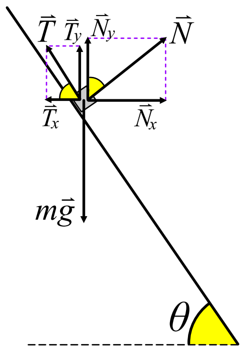


➪ *Η ταλάντωση ενός ηλεκτρονίου δημιουργεί ένα Η/Μ πεδίο - κύμα. Αυτό με τη σειρά του ταξιδεύοντας μπορεί να συναντήσει ένα άλλο ηλεκτρόνιο αρκετα μακρυά και να το θέσει σε ταλάντωση, ακόμα και αν στο μεταξύ η ταλάντωση του πρώτου ηλεκτρονίου έχει τερματιστεί. Φυσικά ένα τέτοιο φαινόμενο δεν θα μπορούσε να περιγραφεί με δυνάμεις, παρά μόνο με πεδία.*

Όπως είπα και στο κομμάτι "Ορμή" του Θέματος 2/a, μπορούμε να αποδώσουμε ορμή σε ένα πεδίο. Το γεγονος λοιπόν ότι ένα πεδίο μπορεί εκτός από ενέργεια να "κατέχει" και ορμή (και να διατηρεί τις δύο αυτές ποσότητες) κάνει το πεδίο *σχεδόν πραγματικό*. Έτσι μπορούμε να καταλάβουμε πως μετασχηματίζεται η ιδέα *"σώμα ασκεί δύναμη σε άλλο σώμα"* στην ιδέα *"σώμα δημιουργεί γύρω του πεδίο και αυτό με τη σειρά του ασκεί δύναμη σε άλλο σώμα"* με το <u>πεδίο</u> (της δεύτερης ιδέας) να έχει τις γνώριμες σε μας ιδιότητες (ΑΔΟ & ΑΔΕ) των σωμάτων (της πρώτης ιδέας).

ΘΕΜΑ 3 / c. / α

ΑΡΓΗ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ (ελάχιστη συχνότητα)

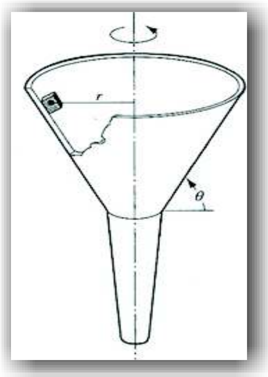


$$F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} = m\frac{\upsilon^2}{r} = m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = m\frac{(2\pi r\nu)^2}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} = m4\pi^2 r\nu^2} \quad (*)$$

Όπου **ν** η συχνότητα περιστροφής του χωνιού.

Εμπειρικά μπορούμε να καταλάβουμε ότι όσο πιο αργά γυρίζει το χωνί, τόσο ο κύβος τείνει να γλυστρίσει προς τα κάτω. Η τριβή που τον κρατάει στη θέση του πρέπει να είναι στατική με φορά αντίθετη της τάσης για κίνηση, δηλαδή με φορά προς τα "πάνω".



» *y-άξονας*: ισορροπία / ακινησία

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_y + T_y = mg \Rightarrow N\cos\theta + T\sin\theta = mg \Rightarrow N\cos\theta + \mu N\sin\theta = mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(\cos\theta + \mu\sin\theta) = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \quad (1)$$

» *x-άξονας*: περιστροφή / ΟΚΚ

$$\Sigma F_x = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} \Rightarrow N_x - T_x = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} \xrightarrow{(*)} N\sin\theta - T\cos\theta = m4\pi^2 r\nu^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N\sin\theta - m4\pi^2 r\nu^2 = T\cos\theta \xrightarrow{(1)} \frac{mg}{\cos\theta + \mu\sin\theta}\sin\theta - m4\pi^2 r\nu^2 = T\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{mg\sin\theta}{(\cos\theta + \mu\sin\theta)\cos\theta} - \frac{m4\pi^2 r\nu^2}{\cos\theta} \quad (\mathrm{I})$$

▸ *Συνθήκη μη ολίσθησης*: $T \le \mu N$

$$T \le \mu N \xrightarrow{(1),(\mathrm{I})} \frac{\cancel{m}g\sin\theta}{(\cos\theta + \mu\sin\theta)\cos\theta} - \frac{\cancel{m}4\pi^2 r\nu^2}{\cos\theta} \le \mu\frac{\cancel{m}g}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g\sin\theta}{(\cos\theta + \mu\sin\theta)\cos\theta} - \frac{\mu g}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \le \frac{4\pi^2 r\nu^2}{\cos\theta} \xrightarrow{\cdot\cos\theta}$$

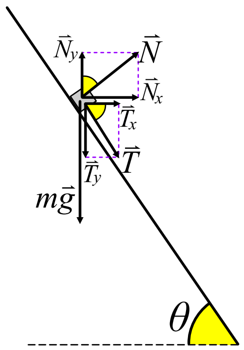
$$\Rightarrow \frac{g\sin\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta} - \frac{\mu g\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \le 4\pi^2 r\nu^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu^2 \ge \frac{g}{4\pi^2 r}\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \Rightarrow \nu \ge \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}\cdot\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}}$$

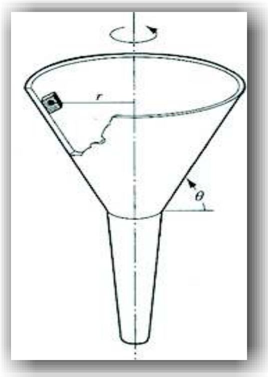
Άρα: $$\boxed{\nu_{\min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}\cdot\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}}}$$

ΘΕΜΑ 3 / c. / β

ΓΡΗΓΟΡΗ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ
(μέγιστη συχνότητα)



Με αντίστοιχες σκέψεις μπορούμε να καταλάβουμε ότι όσο πιο γρήγορα γυρίζει το χωνί, τόσο ο κύβος τείνει να γλυστρίσει προς τα πάνω. Η τριβή που τον κρατάει στη θέση του πρέπει να είναι στατική με φορά αντίθετη της τάσης για κίνηση, δηλαδή με φορά προς τα “κάτω”.



$$F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} = m\frac{\upsilon^2}{r} = m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = m\frac{(2\pi r\nu)^2}{r} \Rightarrow \boxed{F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} = m4\pi^2 r\nu^2} \quad (*)$$

Όπου **ν** η συχνότητα περιστροφής του χωνιού.

y-άξονας: ισορροπία / ακινησία

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_y = T_y + mg \Rightarrow N\cos\theta = T\sin\theta + mg \Rightarrow N\cos\theta = \mu N\sin\theta + mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(\cos\theta - \mu\sin\theta) = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu\sin\theta} \quad (2)$$

---

x-άξονας: περιστροφή / ΟΚΚ

$$\Sigma F_x = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} \Rightarrow N_x + T_x = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} \xrightarrow{(*)} N\sin\theta + T\cos\theta = m4\pi^2 r\nu^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\cos\theta = m4\pi^2 r\nu^2 - N\sin\theta \xrightarrow{(2)} T\cos\theta = m4\pi^2 r\nu^2 - \frac{mg}{\cos\theta - \mu\sin\theta}\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{m4\pi^2 r\nu^2}{\cos\theta} - \frac{mg\sin\theta}{(\cos\theta - \mu\sin\theta)\cos\theta} \quad (II)$$

Συνθήκη μη ολίσθησης: $T \le \mu N$

$$T \le \mu N \xrightarrow{(2),(II)} \frac{\cancel{m}4\pi^2 r\nu^2}{\cos\theta} - \frac{\cancel{m}g\sin\theta}{(\cos\theta - \mu\sin\theta)\cos\theta} \le \mu\frac{\cancel{m}g}{\cos\theta - \mu\sin\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2 r\nu^2}{\cos\theta} - \frac{g\sin\theta}{(\cos\theta - \mu\sin\theta)\cos\theta} \le \mu\frac{g}{\cos\theta - \mu\sin\theta} \xrightarrow{\cdot\cos\theta}$$

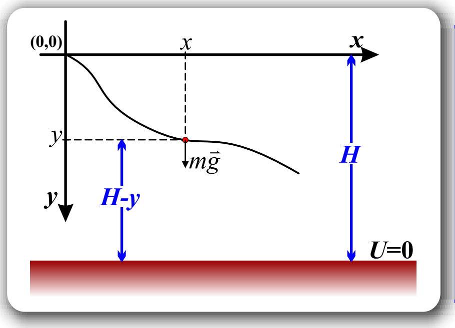
$$\Rightarrow 4\pi^2 r\nu^2 - \frac{g\sin\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} \le \frac{\mu g\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi^2 r\nu^2 \le \frac{g\sin\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} + \frac{\mu g\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu^2 \le \frac{g}{4\pi^2 r}\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} \Rightarrow \nu \le \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}\cdot\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}$$

Άρα: $$\boxed{\nu_{max} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}\cdot\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}}$$

ΘΕΜΑ 4 / i.



$$E = T + U \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \cancelto{0\ (E=\text{σταθ.})}{\frac{dE}{dt}} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \Rightarrow 0 = \frac{d(\frac{1}{2}m\upsilon^2)}{dt} + \frac{d[mg(H-y)]}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}m2\upsilon\frac{d\upsilon}{dt} + mg\cancelto{0}{\frac{dH}{dt}} - mg\frac{dy}{dt} \Rightarrow \cancel{m}g\frac{dy}{\cancel{dt}} = \cancel{m}\upsilon\frac{d\upsilon}{\cancel{dt}} \Rightarrow g\cdot dy = \upsilon\cdot d\upsilon \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\int} g\int_0^y dy = \int_0^\upsilon \upsilon\cdot d\upsilon \Rightarrow g(y-0) = \left(\frac{\upsilon^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) \Rightarrow gy = \frac{\upsilon^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = 2gy \Rightarrow \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = 2gy \Rightarrow \left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2 = 2gy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\cdot\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 = 2gy \Rightarrow \left[\frac{dx}{dt}\right]^2\cdot\left[1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right] = 2gy \xrightarrow{\sqrt{\ }} \frac{dx}{dt}\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2} = \sqrt{2gy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2} = \sqrt{2g}\sqrt{y}\ dt \Rightarrow\Rightarrow dt = \frac{dx\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{y}} \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}{y}}\cdot dx \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\int} \boxed{t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x \sqrt{\frac{1+(dy/dx)^2}{y}}dx}$$

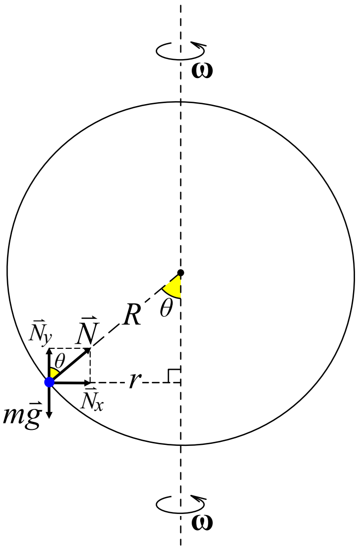
2η λύση

<u>ΘΜΚΕ</u>: $\Delta T = W_{tot.} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = +mgy \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gy}$ $(\$)$

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{dt} \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{\upsilon} \xrightarrow{(\$)} \frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right](dx)^2}}{\sqrt{2gy}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dt = \frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+(dy/dx)^2}{y}}dx \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x \sqrt{\frac{1+(dy/dx)^2}{y}}dx}$$

ΘΕΜΑ 4 / ii. / (α)



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_y = mg \Rightarrow N\cos\theta = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta} \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} \Rightarrow N_x = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} \Rightarrow N\sin\theta = m\frac{\upsilon^2}{r} \xrightarrow{(1)} \frac{\cancel{m}g}{\cos\theta}\sin\theta = \cancel{m}\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow$$

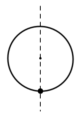
$$\Rightarrow g\sin\theta = \frac{\upsilon^2}{r}\cos\theta \xrightarrow{\upsilon=\omega r} g\sin\theta = \omega^2 r\cos\theta \xrightarrow{\sin\theta=\frac{r}{R}} g\frac{\cancel{r}}{R} = \omega^2\cancel{r}\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g}{R} = \omega^2\cos\theta \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}} \Leftrightarrow \boxed{\theta = \cos^{-1}\frac{g}{\omega^2 R}}$$

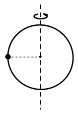
»Περιορισμοί: $\cos\theta \geq -1 \Rightarrow \frac{g}{\omega^2 R} \geq -1 \Rightarrow g \geq -\omega^2 R \Rightarrow \omega^2 \geq -g/R$ (*ισχύει*)

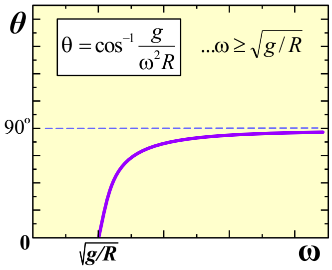
$$\cos\theta \leq +1 \Rightarrow \frac{g}{\omega^2 R} \leq 1 \Rightarrow g \leq \omega^2 R \Rightarrow \omega^2 \geq g/R \Rightarrow \boxed{\omega \geq \sqrt{g/R}}$$

»Όρια: $\omega = \sqrt{g/R} \longrightarrow \cos\theta = \dfrac{g}{\frac{g}{R}R} = 1 \Rightarrow \theta = 0^\circ$

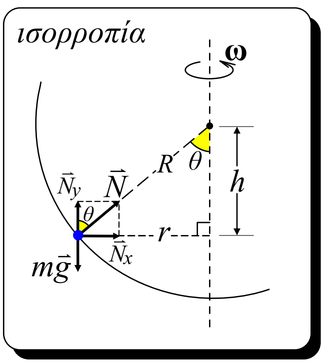


$\omega \to \infty \longrightarrow \cos\theta \to \dfrac{g}{\infty \cdot R} = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$





ΘΕΜΑ 4 / ii. / (β)

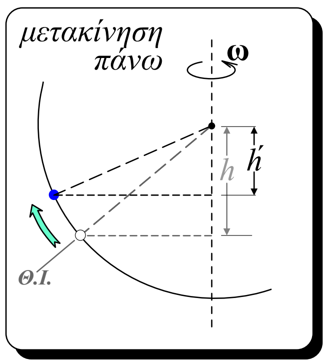


$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{N_y = mg} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \cot\theta &= \frac{h}{r} \\ \cot\theta &= \frac{N_y}{N_x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{N_y}{N_x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_y = N_x\frac{h}{r} = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.}\frac{h}{r} =$$

$$= m\omega^2 r\frac{h}{r} \Rightarrow \boxed{N_y = m\omega^2 h} \quad (2)$$

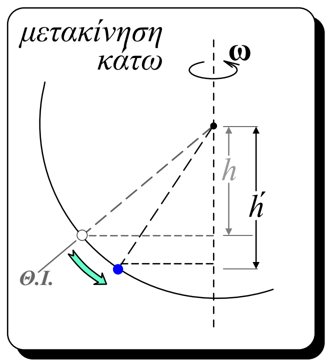


Μικρή μετακίνηση προς τα πάνω

$$h' < h \xrightarrow{(1)} N'_y < N_y \to$$

$$\xrightarrow{(2)} \boxed{N'_y < mg}$$

άρα “κερδίζει” το βάρος (mg) και το σώμα ξανα-κατεβαίνει.



Μικρή μετακίνηση προς τα κάτω

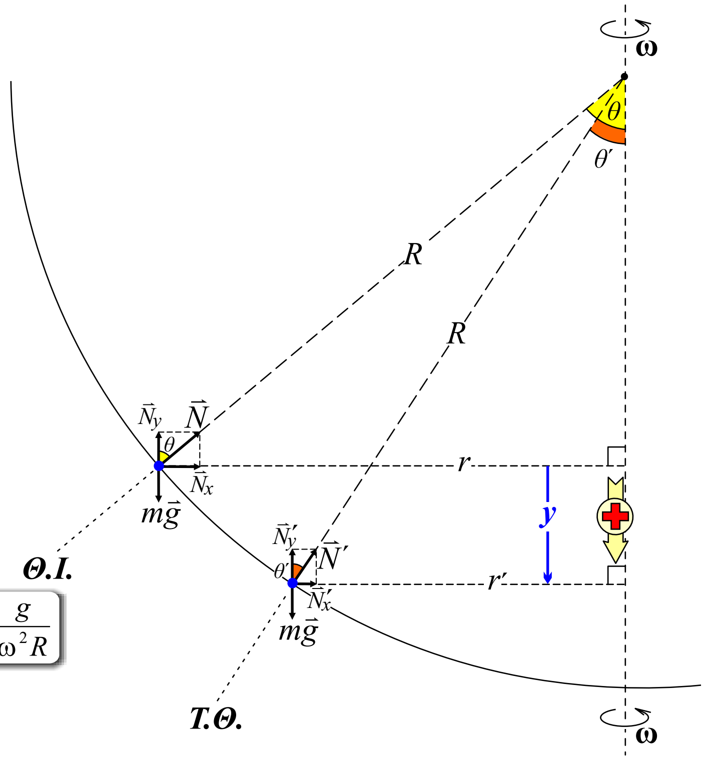
$$h' > h \xrightarrow{(1)} N'_y > N_y \to$$

$$\xrightarrow{(2)} \boxed{N'_y > mg}$$

άρα “κερδίζει” η N'_y και το σώμα ξαναανεβαίνει.

ΑΡΑ Η Θ.Ι. ΕΙΝΑΙ ΘΕΣΗ ΕΥΣΤΑΘΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4 / ii. / (γ)



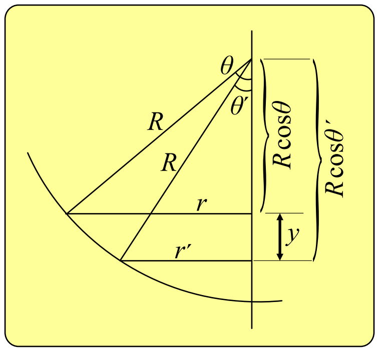
$\cos\theta = \dfrac{g}{\omega^2 R}$

» Με τη γωνιακή ταχύτητα **ω** στην οποία ισορροπεί η χάντρα, την εκτρέπουμε λίγο (κατά *y*) σε μια τυχαία θέση (Τ.Θ.):

ω: σταθ.

$$\Sigma F_x = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} \Rightarrow N'_x = m\frac{\upsilon'^2}{r'} = m\omega^2 r' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N'\sin\theta' = m\omega^2 r' \Rightarrow \boxed{N' = \frac{m\omega^2 r'}{\sin\theta'}} \quad (1)$$



$$\boxed{r' = R\sin\theta'} \quad (2)$$

$$y = R\cos\theta' - R\cos\theta \Rightarrow R\cos\theta' = y + R\cos\theta \Rightarrow \boxed{\cos\theta' = \frac{y + R\cos\theta}{R}} \quad (3)$$

$$\Sigma F_y = mg - N'_y = mg - N'\cos\theta' \xrightarrow{(1)} mg - \frac{m\omega^2 r'}{\sin\theta'}\cos\theta' \xrightarrow{(2)} mg - \frac{m\omega^2 R\cancel{\sin\theta'}}{\cancel{\sin\theta'}}\cos\theta' =$$

$$= mg - m\omega^2 R\cos\theta' \xrightarrow{(3)} mg - m\omega^2\cancel{R}\frac{y + R\cos\theta}{\cancel{R}} = mg - m\omega^2(y + R\cos\theta) = mg - m\omega^2 y - m\omega^2 R\cos\theta \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\Theta.\mathrm{I}.]{\cos\theta = g/\omega^2 R} mg - m\omega^2 y - m\cancel{\omega^2}\cancel{R}\frac{g}{\cancel{\omega^2}\cancel{R}} = \cancel{mg} - m\omega^2 y - \cancel{mg} = -m\omega^2 y \Rightarrow \boxed{\Sigma F_y = -m\omega^2 y}$$

Άρα της μορφής $\Sigma F = -Dy$ με $D = m\omega^2$ άρα Α.Α.Τ. με συχνότητα:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m\omega^2}{m}} = \frac{1}{2\pi}\omega \Rightarrow \boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}}$$

f: συχνότητα ΑΑΤ χάντρας
ω: γωνιακή ταχύτητα ΟΚΚ σύρματος

ΤΕΛΟΣ