ΠΑΡΑΔΟΣΗ 15/4/2013

1ο. Θέμα Μόρια 25

a. Δίνεται ηλεκτρικό πεδίο, που δεν εξαρτάται από τη συντεταγμένη z, με τη μορφή

$\vec{E}=0$, για $r_\perp=\sqrt{x^2+y^2}<R$, και $\vec{E}=A\dfrac{x\hat{x}+y\hat{y}}{x^2+y^2}=A\dfrac{\vec{r}_\perp}{r_\perp^2}=A\dfrac{\hat{r}_\perp}{r_\perp}$, για $r_\perp=\sqrt{x^2+y^2}\geq R$, όπου A θετική σταθερά, και $\vec{r}_\perp=x\hat{x}+y\hat{y}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο $(0,0,z)$ στο σημείο (x,y,z) (και που είναι, επομένως, κάθετο στον άξονα των z και έχει μήκος $r_\perp=\sqrt{x^2+y^2}$).

- i. Δείξετε ότι το πεδίο $\vec{E}$ είναι ηλεκτροστατικό. (2)
- ii. Δείξετε ότι το δυναμικό είναι επίσης ανεξάρτητο του z. (2)
- iii. Υπολογίστε το δυναμικό παντού στο χώρο, ως προς το δυναμικό αναφοράς $V(0,0,0) = V_0$. (3)

b. Τρία σημειακά φορτία βρίσκονται πάνω στους άξονες x, y, z, αντιστοίχως, ως εξής: φορτίο Q στη θέση $(a,0,0)$, φορτίο $2Q$ στη θέση $(0,a,0)$ και φορτίο $-3Q$ στη θέση $(0,0,a)$.Βρείτε:

- i. Το ηλεκτρικό δυναμικό $\phi(0,0,0)$ στο σημείο Ο$(0,0,0)$, με $\phi(\infty)=0$. (2)
- ii. Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(0,0,0)$ στο σημείο Ο$(0,0,0)$. (2)
- iii. Την ηλεκτροστατική ενέργεια W της κατανομής. (2)
- iv. Την ηλεκτρική διπολική ροπή $\vec{p}$ της κατανομής, ως προς το σημείο Ο$(0,0,0)$. (3)

c. Το ηλεκτρικό δυναμικό $\phi(x,y,z)$ σε μια περιοχή του χώρου δίνεται από τη σχέση $\phi=A\left(x^2-y^2+4xy+\sqrt{5}z^2\right)$, όπου $A=$θετική σταθερά.

- i. Βρείτε την ένταση $\vec{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου. (2)
- ii. Δείξετε ότι η επιφάνεια πάνω στην οποία η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου έχει μέτρο με τιμή ίση με E_0 είναι σφαιρική, και βρείτε την ακτίνα της και τη θέση του κέντρου της. (2)
- iii. Υπολογίστε την πυκνότητα φορτίου $\rho(x,y,z)$ στην οποία οφείλεται το ηλεκτρικό πεδίο. (2)
- iv. Υπολογίστε τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου, Φ_E, μέσα από τη σφαιρική επιφάνεια του ερωτήματος (ii). (3)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(a)

(i) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A\, x/r_\perp^2 & A\, y/r_\perp^2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}0 - \hat{y}0 + \hat{z}A\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r_\perp^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r_\perp^2}\right)\right]$ (1)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r_\perp^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(x^2+y^2)}\right) = y(-1)\left(x^2+y^2\right)^{-2}2x = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$, όμοια

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r_\perp^2}\right) = \frac{-2yx}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

Οπότε, η αντικατάστασή τους στην (1)$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$, άρα το $\boxed{\vec{E}\text{ : ηλεκτροστατικό}}$

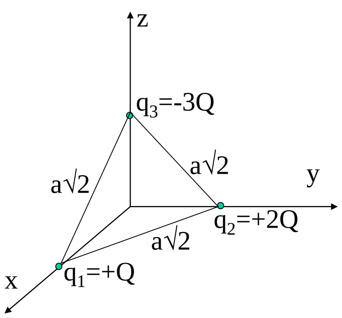
(ii) $E_z = 0$, αλλά $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{V: ανεξάρτητο του z.}}$

(iii) Η ολοκλήρωση ξεκινά από οποιοδήποτε σημείο του z, (αφου το V:ανεξάρτητο του z), και μπορεί να ακολουθήσει οποιαδήποτε διαδρομή ολοκλήρωσης, (αφού το $\vec{E}$: ηλεκτροστατικό). Άρα επιλέγουμε να ξεκινήσουμε από το σημείο z που αντιστοιχεί στο (x,y,z) που θα υπολογιστεί το V και να ακολουθήσει την διαδρομή κατά μήκος του $r_\perp$.

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_0^{r_\perp} dV = -\int_0^{r_\perp}\vec{E}\cdot d\vec{r}_\perp = -\int_0^{R}\vec{E}\cdot d\vec{r}_\perp - \int_R^{r_\perp}\vec{E}\cdot d\vec{r}_\perp = -0 - \int_R^{r_\perp} A\frac{\hat{r}_\perp}{r_\perp}\cdot d\vec{r}_\perp = -A\ln\left(\frac{r_\perp}{R}\right)$$

Τελικά : $\boxed{V(r_\perp) = V_0 - A\ln\left(\frac{r_\perp}{R}\right)}$

(b)



(i) $$V(0,0,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(-3Q + 2Q + Q\right) = 0$$

(ii)

$$\vec{E}(0,0,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\hat{x}\frac{Q}{a^2} - \hat{y}\frac{2Q}{a^2} + \hat{z}\frac{3Q}{a^2}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{E}(0,0,0) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z}\right)}$$

(iii)

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}}\left(q_1q_2 + q_2q_3 + q_1q_3\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}}\left(2Q^2 - 3Q^2 - 6Q^2\right) \Rightarrow \boxed{W = \frac{-7Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}}}$$

(iv) $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = Q(a,0,0) + 2Q(0,a,0) - 3Q(0,0,a) \Rightarrow \boxed{\vec{p} = Qa(1,2,-3)}$

(c)

(i) Από τη σχέση $\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\phi$ βρίσκουμε

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = -A\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x^2 - y^2 + 4xy + \sqrt{5}z^2\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -A(2x+4y)\hat{\boldsymbol{x}} - A(-2y+4x)\hat{\boldsymbol{y}} - A(2\sqrt{5}z)\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \vec{\boldsymbol{E}} = -2A\Big((x+2y)\hat{\boldsymbol{x}} - (y-2x)\hat{\boldsymbol{y}} + (\sqrt{5}z)\hat{\boldsymbol{z}}\Big)$$

(ii) Το τετράγωνο του μέτρου του $\vec{\boldsymbol{E}}$ είναι: $\left|\vec{\boldsymbol{E}}\right|^2 = 4A^2\left((x+2y)^2 + (y-2x)^2 + (\sqrt{5}z)^2\right)$

$$\left|\vec{\boldsymbol{E}}\right|^2 = 4A^2(x^2 + 4xy + 4y^2 + y^2 - 4xy + 4x^2 + 5z^2) = 20A^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

Για δεδομένη τιμή E_0 του $\left|\vec{\boldsymbol{E}}\right|$, ισχύει η σχέση: $20A^2(x^2 + y^2 + z^2) = E_0^2$.

Η σχέση αυτή ικανοποιείται πάνω στην επιφάνεια $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{E_0^2}{20A^2}$

που είναι σφαίρα με κέντρο το σημείο (0, 0, 0) και ακτίνα $\dfrac{E_0}{2\sqrt{5}A}$.

(iii)

$$\rho = \varepsilon_0\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}} = \varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = -2A\varepsilon_0\left(\frac{\partial(x+2y)}{\partial x} + \frac{\partial(-y+2x)}{\partial y} + \frac{\partial(\sqrt{5}z)}{\partial z}\right) = -2A\varepsilon_0\left(1 - 1 + \sqrt{5}\right)$$

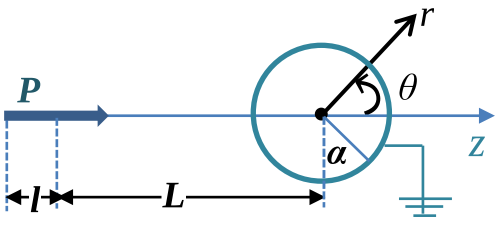
$$\rho = -2\sqrt{5}\varepsilon_0 A$$

(iv) Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss, η ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι ίση με $\Phi_E = \int_S \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{a}} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, d\upsilon$.

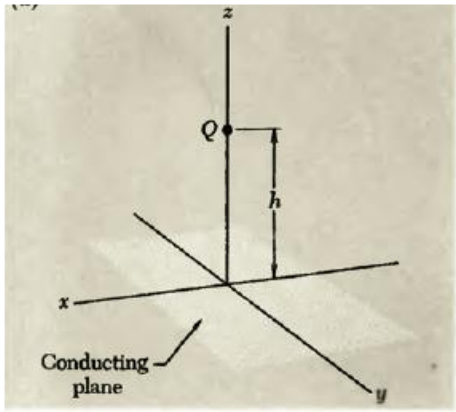
Επειδή η χωρική πυκνότητα φορτίου είναι σταθερή και ίση με $\rho = -2A\varepsilon_0\left(2+\sqrt{5}\right)$, προκύπτει ότι:

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, d\upsilon = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_V d\upsilon = \frac{-2\sqrt{5}\varepsilon_0 A}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{E_0}{2\sqrt{5}A}\right)^3 \qquad \text{ή} \qquad \Phi_E = -\frac{\pi}{15}\frac{E_0^{\,3}}{A^2}$$

a. Μπροστά από μια γειωμένη και αγώγιμη σφαίρα ακτίνας α τοποθετείται μια ηλεκτρική διπολική ροπή P η οποία κατευθύνεται στο κέντρο της σφαίρας. Το κέντρο της ροπής απέχει απόσταση L από το κέντρο της σφαίρας ενώ τα φορτία απέχουν απόσταση 2l << L. Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα της παραγράφου 6-9 να υπολογίσετε το δυναμικό που προκύπτει σε μια τυχαία θέση που απέχει r >> α από το κέντρο της σφαίρας και σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα z. (15)



b. Το διπλανό σχήμα απεικονίζει ένα σημειακό φορτίο πάνω από μια άπειρη αγώγιμη πλάκα που βρίσκεται σε μηδενικό δυναμικό. Να υπολογισθεί το έργο που απαιτείται για να φέρουμε το φορτίο Q από το άπειρο σε ύψος h πάνω από στο την πλάκα με τη βοήθεια των εξισώσεων 8.3, 8.35 και $W=\int \vec{F}\cdot d\vec{l}$ (βλέπε 6.30). Να σχολιασθούν και να ερμηνευτούν τα αποτελέσματα. (10)



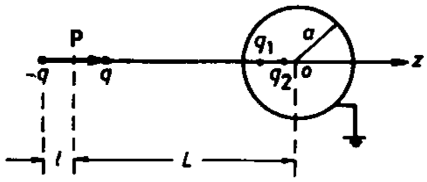
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(a)

Τη διπολική ροπή $\vec{P}=p\hat{z}=\lim_{l\to 0}2lq\hat{z}$ μπορούμε να τη θεωρήσουμε μπορούμε ως ένα θετικός και ένα αρνητικό φορτίο q απέχοντα κατά 2l. Συνεπώς είναι σαν να έχουμε μπροστά από τη σφαίρα δύο φορτία στις θέσεις που απέχουν 2l.

$$\begin{array}{rl} \textit{Φορτίο} & \textit{Θέση} \\ q: & -L+l \\ -q: & -L-l \end{array} \qquad (1.1)$$

Το πρόβλημα ενδείκνυται να μελετηθεί με τη μέθοδο των ειδώλων. Από την παράγραφο 6-9 γνωρίζουμε ότι η ισοδυναμική επιφάνεια της γειωμένης σφαίρας (V = 0) μπορεί να αναπαραχθεί θεωρώντας τα αρχικά φορτία και τα είδωλα αυτών. Με τη βοήθεια των σχέσεων του σχήματος 6-12 βρίσκουμε ότι η θέση και το μέγεθος καθενός φορτίου ειδώλου θα δίνεται από τις σχέσεις.



$$q_1=-\frac{a}{L-l}q \qquad \textit{στη θέση} \qquad (0,0,-\frac{a^2}{L-l}) \qquad (1.2)$$

$$q_2=-\frac{a}{L+l}(-q) \qquad \textit{στη θέση} \qquad (0,0,-\frac{a^2}{L+l}) \qquad (1.3)$$

Οι σχέσεις (1.2) και (1.3) λόγω της

$$L >> l$$
$$\frac{1}{L \pm l} \simeq \frac{1}{L} \mp \frac{l}{L^2} \tag{1.4}$$

Βρίσκουμε

$$q_1 = -\frac{a}{L}q - \frac{alq}{L^2} = -\frac{a}{L}q - \frac{ap}{2L^2} \quad \sigma\tau\eta\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta \quad (0,0,-\frac{a^2}{L} - \frac{a^2 l}{L^2}) \tag{1.5}$$

$$q_2 = \frac{a}{L}q - \frac{alq}{L^2} = \frac{a}{L}q - \frac{ap}{2L^2} \quad \sigma\tau\eta\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta \quad (0,0,-\frac{a^2}{L} + \frac{a^2 l}{L^2}) \tag{1.6}$$

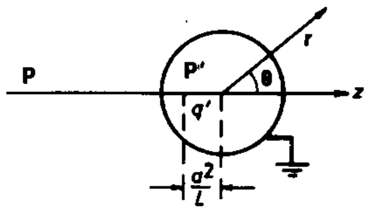
Από τις σχέσεις (1.5) και (1.6) συνάγεται τη δράση των δύο φορτίων ειδώλων σε αποστάσεις αρκετά μεγάλες σε σχέση με την ακτίνα της σφαίρας μπορούμε να τη θεωρήσουμε ως μια διπολική ροπή ίση με

$$\vec{P}' = \frac{a}{L}q \cdot \frac{2a^2}{L^2}\hat{z} \tag{1.7}$$

Και με ένα συνολική φορτίο q' (Νόμος Gauss αναφέρεται στο συνολικό περικλειόμενο φορτίο)

$$q' = -\frac{ap}{2L^2} + (-\frac{ap}{2L^2}) = -\frac{ap}{L^2} \tag{1.8}$$

Παρατηρείστε ότι τόσο η $\vec{P}'$ (κέντρο της) όσο και το φορτίο Q βρίσκονται στη θέση $r' = (0,0,-a^2/L)$. Η παραπάνω διαδικασία παριστάνεται στο διπλανό σχήμα.



Συνεπώς το δυναμικό στο σημείο r >> α θα ισούται με το δυναμικό που δημιουργεί η αρχική διπολική ροπή $\vec{P}$, το είδωλό της $\vec{P}'$ και το φορτίο q'.

Με βάση τη σχέση 6-25 του βιβλίου θα έχουμε

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{\vec{P}'\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} + \frac{\vec{P}'\cdot(\vec{r}+L\hat{z})}{|\vec{r}+L\hat{z}|^3}\right] \xrightarrow[\vec{P}'\cdot\vec{r}\,'=-\frac{a^3p}{L^3}\frac{a^2}{L}]{\vec{P}'\cdot\vec{r}=\frac{a^3p}{L^3}\cos\theta} \xrightarrow[|\vec{r}-\vec{r}\,'|=[x^2+y^2+(z+\frac{a^2}{L})^2]^{1/2}]{z=r\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{ap}{L^2(r^2+\frac{2a^2r}{L}\cos\theta+\frac{a^4}{L^2})^{1/2}} + \frac{a^3p(r\cos\theta+a^2/L)}{L^3(r^2+\frac{2a^2r}{L}\cos\theta+\frac{a^4}{L^2})^{3/2}} + \frac{p(r\cos\theta+L)}{L^3(r^2+2rL\cos\theta+L^2)^{3/2}}\right]$$

(1.9)

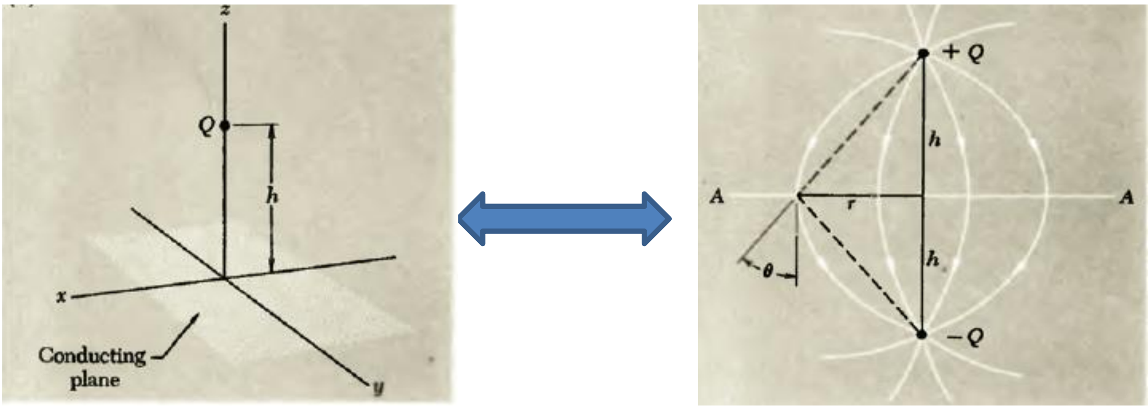
Δηλ. το δυναμικό (και η ένταση του πεδίου) αντιστοιχεί στην επαλληλία ενός διπόλου και ενός φορτίου.

<u>Παρατήρηση:</u>

Προφανώς για περιοχές συγκρίσιμες με την ακτίνα της σφαίρας θα πρέπει να υπολογίσουμε το δυναμικό από τις σχέσεις (1.5), (1.6) και από την αρχική διπολική ροπή. Παρατηρείστε ότι εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη προσέγγιση της διπολικής ροπής καθόσον γι΄ αυτή θεωρούμε $\vec{P} = p\,\hat{z} = \lim_{l\to 0} 2lq\,\hat{z}$, δηλαδή τα φορτία που τη συνιστούν είναι απειροστά κοντά μεταξύ των και συνεπώς οιαδήποτε απόσταση πληροί την απαίτηση r >> 2l. Αν το l δεν είναι απειροστό τότε προφανώς θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τις ακριβείς θέσεις των φορτίων και τις αποστάσεις από το σημείο παρατήρησης και να εφαρμόσουμε τη σχέση $\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \dfrac{q_i}{r_i}$

(b)

Η σχέση 8-3 του βιβλίου αναφέρεται στην ενέργεια σημειακής κατανομής φορτίων. Αυτό με τη σειρά του υποδηλώνει ότι θα πρέπει να βρούμε το ισοδύναμο του συστήματος φορτίο + άπειρη γειωμένη πλάκα από άθροισμα σημειακών φορτίων. Αυτό όμως έχει γίνει όμως στη § 6-8. Δηλαδή ισοδυναμεί με τη διάταξη



Συνεπώς με βάση την (8-3) το έργο του απαιτείται θα ισούται με την ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος, δηλ.

$$U = \sum_{\substack{\text{όλα τα}\\ \text{ζεύγη}}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j>i}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{Q(-Q)}{4\pi\varepsilon_0 (2h)} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2h)} \qquad (1.10)$$

Το μείον υποδηλώνει ότι έχει αφαιρεθεί ένα ποσό ενέργειας από το σύστημα των φορτίων, δηλ. κατά τη δημιουργία των κερδίζουμε το αντίστοιχο ποσό ενέργειας δηλ.

$$W = -U = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2h)} \qquad (1.11)$$

Δηλ. αυτό που θα προέκυπτε από δύο σημειακά φορτία ***χωρίς τη παρουσία*** της γειωμένης αγώγιμης πλάκας.

Με τη βοήθεια της σχέσεως 8-35, βρίσκουμε ότι το αντίστοιχο έργο ισούται με την ενέργεια του συστήματος και ισούται με

$$W = -U = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{\substack{\text{όλος ο} \\ \text{χώρος}}} \mathrm{E}^2 dV =$$

$$-\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\infty}^{2h}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 (4\pi r^2)dr = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{2h}\frac{1}{r^2}r^2 dr = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h}\bigg|_{\infty}^{2h} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4h} \tag{1.12}$$

Παρατηρείστε ότι το άνω όριο ολοκλήρωσης είναι 2h, γιατί η απόσταση των δύο φορτίων είναι 2h αφού η ένταση του πεδίου που χρησιμοποιήθηκε αναφέρεται ως το ένα φορτίο. Μπορούμε όμως να βρούμε το παραπάνω αποτέλεσμα χωρίς την εκτέλεση των πράξεων, απλά λαμβάνοντας υπόψη μας, ότι στη περίπτωση που θα είχαμε το ισοδύναμο των δύο φορτίων, τότε ο χώρος ολοκλήρωσης θα ήταν όλος ο χώρος, δηλ, για $z > 0$ και για $x < 0$. Αντίθετα αν είχαμε το φορτίο και την πλάκα τότε ό χώρος ολοκλήρωσης θα ήταν ό μισός, αυτός για $z > 0$. Συνεπώς το αποτέλεσμα της (1.12) θα είναι το μισό της (1.11), δηλ.

$$W = -U = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{\substack{\text{όλος ο} \\ \text{χώρος}}} \mathrm{E}^2 dV = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 (4h)} \tag{1.13}$$

Τέλος, το αποτέλεσμα της (1.13) μπορούμε να το πάρουμε και με τη βοήθεια της σχέσεως που μας δίδεται και λαμβάνοντας υπόψη ότι η δύναμη που ασκείται μεταξύ των φορτίων είναι

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(2h)^2}\hat{z} \tag{1.14}$$

Και δεδομένου ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι αστρόβιλο μπορούμε να επιλέξουμε την κάθετη προσέγγιση, οπότε

$$W = \int_{\infty}^{h}\vec{F}\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{h}\frac{Q^2}{4z^2}\cdot dz = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4z}\bigg|_{\infty}^{h} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4h} \tag{1.15}$$

Από τους παραπάνω τρόπους υπολογισμού του έργου βλέπουμε ότι η μέθοδος των ειδώλων προσδιορίζει μεν ορθά τη δύναμη που ασκείται μεταξύ του φορτίου και της πλάκας (ειδώλου). Όχι όμως και όμως και το απαιτούμενο έργο. (Βρίσκει το διπλάσιο).

Αυτό οφείλεται στο ότι καθώς μετακινείται το φορτίο Q, σε σχέση με την πλάκα, αποθηκεύεται έργο ***μόνο στο Q***, Αν όμως είχα δύο φορτία Q και – Q, τότε θα απαιτείται το διπλάσιο έργο. (αυτό βρίσκει η διάταξη των δύο διακριτών φορτίων)

Επιπλέον είναι αληθές ότι καθώς μετακινείται το Q τότε και τα επαγόμενα φορτία κινούνται μέσα στην αγώγιμη πλάκα. Όμως αυτό δεν κοστίζει τίποτε σε έργο καθόσον η πλάκα βρίσκεται σε μηδενικό ή σταθερό δυναμικό. Σε αντίθεση αν φέρουμε ***ταυτόχρονα*** δύο σημειακά φορτία χωρίς την παρουσία γειωμένου αγωγού, τότε παράγεται έργο και ***στα δύο φορτία*** και συνεπώς απαιτείται το διπλάσιο έργο.

3ο. Θέμα **Μόρια 25**

Στο βιβλίο για τον υπολογισμό της πόλωσης P ενός συστήματος που αποτελείται από N δίπολα ανά μονάδα όγκου και ροπής p, γίνεται η παραδοχή μιας υψηλής θερμοκρασίας T ως προς το τοπικό ηλεκτρικό πεδίο E ενώ στην ανάπτυξη της σχέσεως 11.16 χρησιμοποιούνται οι δύο πρώτοι όροι (Σχ. 11.17). Αν δεν κάνουμε αυτή την παραδοχή, αποδείξτε ότι

i. η πόλωση θα δίνεται από την σχέση $P = Np\left[\coth u - \frac{1}{u}\right]$, όπου $u = \frac{pE}{kT}$. Δίνεται το ολοκλήρωμα $\frac{\int_{-1}^{1} xe^{ax}dx}{\int_{-1}^{1} e^{ax}dx} = \coth u - \frac{1}{u}$ (6)

ii. στην περίπτωση πολύ υψηλής θερμοκρασίας το παραπάνω αποτέλεσμα οδηγεί στην σχέση του βιβλίου σας. Τί ισχύει σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες; (10)

iii. Υπολογίστε την διηλεκτρική σταθερά ε σε υψηλή θερμοκρασία ενός συστήματος που αποτελείται από N δίπολα ανά μονάδα όγκου με διπολική ροπή p, όταν το τοπικό ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την σχέση $\vec{E}_{hole} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_o(1+2\varepsilon)}$, όπου $\vec{P}$ είναι η πόλωση του υλικού και $\vec{E}$ το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. (9)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(i) Όπως εξηγεί στο βιβλίο (11-3), η πόλωση θα ισούται με την μέση τιμή όλων των προβολών των διπολικών ροπών στην κατεύθυνση του πεδίου. Λαμβάνοντας υπ' όψη την στατιστική κατανομή $e^{-U/kT}$ (11.15) και την ενέργεια του διπόλου $U = -pE\cos\theta$ (11.14), προκύπτει η αντίστοιχη σχέση της (11.19)

$$P = p\frac{2\pi\int_0^{\pi} \cos\theta e^{pE\cos\theta/kT}\sin\theta d\theta}{2\pi\int_0^{\pi} e^{pE\cos\theta/kT}\sin\theta d\theta} = p\frac{\int_0^{\pi}\cos\theta e^{u\cos\theta}d(\cos\theta)}{\int_0^{\pi} e^{u\cos\theta}d(\cos\theta)} =$$

$$= p\frac{\int_0^{\pi}\cos\theta e^{u\cos\theta}d(\cos\theta)}{\int_0^{\pi} e^{u\cos\theta}d(\cos\theta)} = p\frac{\int_{-1}^{1} xe^{ux}dx}{\int_{-1}^{1} e^{ux}dx} = p\left[\coth u - \frac{1}{u}\right]$$

(ii) Όταν $u \ll 1$, η συνάρτηση θα λάβει την μορφή

$$\left[\coth u-\frac{1}{u}\right]=\lim_{u\to 0}\left(\frac{e^{u}+e^{-u}}{e^{u}-e^{-u}}-\frac{1}{u}\right)=\lim_{u\to 0}\left(\frac{2+u^2+\ldots}{2u+\frac{u^3}{3}+\ldots}-\frac{1}{u}\right)=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\left(\frac{2+u^2+\ldots}{2+\frac{u^2}{3}+\ldots}-1\right)=\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\left(\frac{2+u^2+\ldots-2-\frac{u^2}{3}-\ldots}{2+\frac{u^2}{3}+\ldots}\right)$$

Που καταλήγει στην

$$\coth u-\frac{1}{u}\cong\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\left(\frac{\frac{2u^2}{3}+\ldots}{2+\frac{u^2}{3}+\ldots}\right)=\frac{u}{3}$$

Επομένως, $P=Np\left[\coth u-\frac{1}{u}\right]\to\frac{Np}{3}u=\frac{Np^2E}{3kT}$ (σχ. 11.20)

Στις πολύ χαμηλές θερμοκρασίες ($T\to 0$) θα έχουμε το όριο για $u\to\infty$.

Προφανώς από τον ορισμό προκύπτει ότι

$$\left[\coth u-\frac{1}{u}\right]=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{e^{u}+e^{-u}}{e^{u}-e^{-u}}-\frac{1}{u}\right)\cong\lim_{u\to\infty}\left(\frac{e^{u}}{e^{u}}\right)=1$$

Που οδηγεί στην πόλωση $P=Np$, δηλαδή τον πλήρη προσανατολισμό των διπόλων, όπως αναμένεται.

(iii) Στην περίπτωση υψηλής θερμοκρασίας θα ισχύει η σχέση του βιβλίου που αποδείξαμε πιο πριν $P=\frac{Np^2E_{hole}}{3kT}=NaE_{hole}$, όπου ας ορίσουμε $a=\frac{p^2}{3kT}$.

Με αντικατάσταση του τοπικού ηλεκτρικού πεδίου έχουμε ότι

$$P=NaE_{hole}=Na\left[E+\frac{P}{\varepsilon_o(1+2\varepsilon)}\right]$$

Λύνοντας ως προς την πόλωση έχουμε $P\left[\frac{1}{Na}-\frac{1}{\varepsilon_o(1+2\varepsilon)}\right]=E$

Θα ισχύει επίσης ότι $P=\chi\varepsilon_o E=(\varepsilon-1)\varepsilon_o E$

Ο συνδυασμός των δύο δίνει την σχέση $\varepsilon_o(\varepsilon-1)\left[\frac{1}{Na}-\frac{1}{\varepsilon_o(1+2\varepsilon)}\right]=1$

Που λύνεται ως προς την διηλεκτρική σταθερά ε.

Εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι

$Na\varepsilon_o(1+2\varepsilon)=\varepsilon_o^2(1+2\varepsilon)(\varepsilon-1)-Na\varepsilon_o(\varepsilon-1)$, οπότε

$$\frac{Na}{\varepsilon_o}+2\varepsilon\frac{Na}{\varepsilon_o}=2\varepsilon^2-\varepsilon-1+\frac{Na}{\varepsilon_o}-\frac{Na}{\varepsilon_o}\varepsilon\quad\Rightarrow\quad 2\varepsilon^2-\varepsilon\left(1+\frac{3Na}{\varepsilon_o}\right)-1=0$$

Τελικά προκύπτει η σχέση

$$\varepsilon = \frac{1+\frac{3Na}{\varepsilon_o}+\sqrt{\left(1+\frac{3Na}{\varepsilon_o}\right)^2+8}}{4} = 1+\frac{3}{4}\left[\frac{Na}{\varepsilon_o}-1+\sqrt{1+\frac{2Na}{3\varepsilon_o}+\frac{N^2a^2}{\varepsilon_o^2}}\right]$$

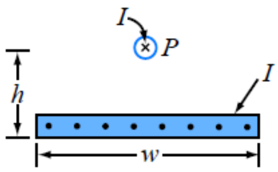
Αφού η αρνητική ρίζα απορρίπτεται (ε<0).

4ο. Θέμα **Μόρια 25**

a. Ένα λεπτό αγώγιμο φύλλο με άπειρο μήκος κατά την *y* διεύθυνση και εύρος *w* κατά την *x* διεύθυνση βρίσκεται στο *x-y* επίπεδο και διαρρέεται από ρεύμα *I* στην διεύθυνση –*y*, δηλ. προς τα εμάς. Προσδιορίστε:

i. το μαγνητικό πεδίο σε σημείο P στη μέση απόσταση από τα δύο άκρα του φύλλου και σε ύψος h πάνω από αυτό (βλ. σχήμα) (10)

ii. την δύναμη ανά μονάδα μήκους που ασκείται σε ένα άπειρα μακρύ σύρμα που περνάει από το σημείο P και παράλληλο στο φύλλο, εάν το ρεύμα που διαρρέει το σύρμα έχει την ίδια τιμή αλλά αντίθετη διεύθυνση από το ρεύμα του φύλλου. (3)



b. Μια ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου που δίνεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{j} = \hat{\mathbf{z}} j_0 \qquad \left(\frac{A}{m^2}\right)$$

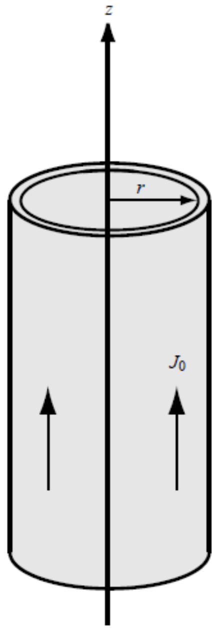
δημιουργεί ένα διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό

$$\mathbf{A} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{J_0}{4\varepsilon_0 c^2}(x^2 + y^2) \qquad \left(\frac{Wb}{m}\right)$$

i. Να εφαρμοστεί η διανυσματική εξίσωση Poisson για να επιβεβαιωθεί η παραπάνω έκφραση (4)

ii. Να χρησιμοποιηθεί η έκφραση για το $\boldsymbol{A}$ για να βρεθεί το $\boldsymbol{B}$. (4)

iii. Να χρησιμοποιηθεί η έκφραση για το j σε συνδυασμό με τον νόμο του Ampere για να βρεθεί το $\boldsymbol{B}$. Να συγκριθεί το αποτέλεσμά σας με αυτό που βγήκε στο (ii). (4)



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

a.i) Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το φύλλο αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό, από άπειρα σε μήκος σύρματα με εύρος dx, το ένα δίπλα στο άλλο, με το κάθε ένα να διαρρέεται από ρεύμα $I_x = \frac{Idx}{w}$. Εάν διαλέξουμε το σύστημα αξόνων όπως δείχνουμε στο σχήμα, με το σύρμα σε απόσταση x από την αρχή των συντεταγμένων, τότε το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{R}$ του από το σημείο P, είναι:

$$\boldsymbol{R} = -\hat{\boldsymbol{x}}x + \hat{\mathbf{z}}h.$$

Η εξίσωση 13.18 μας δίνει την έκφραση για το μαγνητικό πεδίο λόγω ενός σύρματος με άπειρο μήκος που διαρρέεται από ρεύμα I όπως

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{2I}{r}.$$

Τώρα θα προσαρμόσουμε την έκφραση στην παρούσα κατάσταση αντικαθιστώντας το I με το $I_x = \frac{Idx}{w}$, και το r με $R = (x^2 + h^2)^{1/2}$, και προσδιορίζοντας την κατάλληλη διεύθυνση για το μαγνητικό πεδίο. Από τον νόμο του Biot-Savart, η διεύθυνση του $\boldsymbol{B}$ καθορίζεται από το $\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{R}$ όπου $\boldsymbol{I}$ είναι στην διεύθυνση της ροής του ρεύματος. Στην παρούσα περίπτωση, το $\boldsymbol{I}$ διευθύνεται προς τα εμάς, δηλ. στην $-\hat{\boldsymbol{y}}$ διεύθυνση. Επομένως, η διεύθυνση του πεδίου είναι

$$\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{R}\,|} = \frac{-\hat{\boldsymbol{y}}\times(-\hat{\boldsymbol{x}}x + \hat{\boldsymbol{z}}h)}{|-\hat{\boldsymbol{y}}\times(-\hat{\boldsymbol{x}}x + \hat{\boldsymbol{z}}h)|} = \frac{-(\hat{\boldsymbol{x}}h + \hat{\boldsymbol{z}}x)}{(x^2+h^2)^{1/2}}.$$

Συνεπώς, το πεδίο

$$d\boldsymbol{B} = \frac{-(\hat{\boldsymbol{x}}h + \hat{\boldsymbol{z}}x)}{(x^2+h^2)^{1/2}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{2I_x}{R} = \frac{-(\hat{\boldsymbol{x}}h + \hat{\boldsymbol{z}}x)}{x^2+h^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{2Idx}{w}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(0,0,h) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_{x=-w/2}^{w/2} -(\hat{\mathbf{x}}h + \hat{\mathbf{z}}h)\frac{2Idx}{w(x^2+h^2)} \\
&= \frac{-2I}{4\pi\varepsilon_0 c^2 w}\int_{x=-w/2}^{w/2}(\hat{\mathbf{x}}h + \hat{\mathbf{z}}h)\frac{dx}{x^2+h^2} \\
&= \frac{-2I}{4\pi\varepsilon_0 c^2 w}\left(\hat{\mathbf{x}}h\int_{x=-w/2}^{w/2}\frac{dx}{x^2+h^2} + \hat{\mathbf{z}}\int_{x=-w/2}^{w/2}\frac{xdx}{x^2+h^2}\right) \\
&= \frac{-2I}{4\pi\varepsilon_0 c^2 w}\left(\hat{\mathbf{x}}h\left(\frac{1}{h}\tan^{-1}\left(\frac{x}{h}\right)\right)\Bigg|_{\mathrm{x}=-\mathrm{w}/2}^{\mathrm{w}/2} + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+h^2)\right)\Bigg|_{x=-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\right) \\
&= -\hat{\boldsymbol{x}}\frac{I}{\pi\varepsilon_0 c^2 w}\tan^{-1}\left(\frac{w}{2h}\right) \qquad (A/m)
\end{aligned}$$

Στο σημείο P (σχήμα) το πεδίο δείχνει προς τα αριστερά. Η συνιστώσα z είναι μηδενική εξαιτίας της συμμετρίας.

a.ii) Από την εξίσωση 13.11 η δύναμη ανά μονάδα μήκους είναι

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}\times\mathbf{B} = I\hat{\mathbf{y}}\times\left(-\hat{\mathbf{x}}\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 w}\tan^{-1}\left(\frac{w}{2h}\right)\right) = \hat{\mathbf{z}}\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 w}\tan^{-1}\left(\frac{w}{2h}\right) \qquad (\mathrm{N})$$

Η δύναμη είναι απωστική, το καλώδιο δέχεται μια δύναμη προς τα επάνω.

(b.i)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A} = \hat{\mathbf{x}}\nabla^2 A_x + \hat{\mathbf{y}}\nabla^2 A_y + \hat{\mathbf{z}}\nabla^2 A_z &= \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[-\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{j_0}{4}(x^2+y^2)\right] \\
&= -\hat{\boldsymbol{z}}\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{j_0}{4}(2+2) = -\hat{\boldsymbol{z}}\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}j_0
\end{aligned}$$

Συνεπώς αποδείχτηκε ότι $\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\boldsymbol{j}.$

(b.ii)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} &= \left[\hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right] \\
&= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial A_z}{\partial y} - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\
&= \left[\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{j_0}{4\varepsilon_0 c^2}(x^2+y^2)\right) - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{j_0}{4\varepsilon_0 c^2}(x^2+y^2)\right)\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\left(-\hat{\mathbf{x}}\frac{j_0 y}{2} + \hat{\mathbf{y}}\frac{j_0 x}{2}\right) \qquad (A/m)$$

(b.iii)

$$\oint_C \boldsymbol{B} d\boldsymbol{l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} I = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{ds}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} B_\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} 2\pi r = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j_0 \cdot \pi r^2$$

$$\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} B_\varphi = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j_0 \frac{r}{2}$$

Χρειάζεται να μετασχηματίσουμε την έκφραση από κυλινδρικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Έτσι

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\boldsymbol{x}} \sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\varphi = -\hat{\mathbf{x}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Συνεπώς

$$\boldsymbol{B} = \left(-\hat{\boldsymbol{x}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + +\hat{\boldsymbol{y}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{j_0}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\left(-\hat{\mathbf{x}}\frac{y j_0}{2} + \hat{\mathbf{y}}\frac{x j_0}{2}\right)$$

το οποίο είναι ταυτόσημο με το αποτέλεσμα του ερωτήματος (ii).