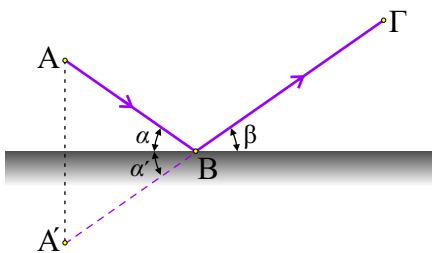




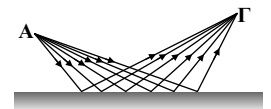
ΘΕΜΑ 1 / α. / (i)

➔ Σύμφωνα με την αρχή του *Fermat* (η οποία διατυπώθηκε το 1657-8) το φως διαδίδεται στο χώρο κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ακολουθεί την πορεία που απαιτεί τον λιγότερο χρόνο (*αρχή του ελαχίστου χρόνου*). Διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Ήρωνα τον Αλεξανδρεΰ (περίπου το 200 πΧ) ως *αρχή του ελαχίστου δρόμου*, για την κατοπτρική ανάκλαση, αλλά γενικεύτηκε από τον *Fermat* και στην περίπτωση της διάθλασης ή γενικά της διάδοσης του φωτός σε κάποιο οπτικό μέσο, ομογενές ή μη.

Μια απλή απόδειξη της αρχής στην περίπτωση της κατοπτρικής ανάκλασης είναι η εξής:



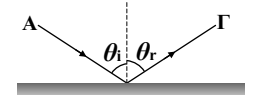
Ακτίνα φωτός ξεκινάει από το A και θέλει να πάει στο Γ. Πέρα από την προφανή ευθεία διαδρομή ΑΓ, η οποία είναι η συντομότερη, αν θέσουμε τον περιορισμό της ανάκλασης στο κάτοπτρο, ποιο πρέπει να είναι το σημείο B ώστε η διαδρομή ΑΒΓ να είναι η συντομότερη από κάθε άλλη πιθανή;



Για να βρούμε τη θέση του B (ή τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί) φέρουμε το συμμετρικό του A σημείο “μέσα” στον καθρέφτη και το ονομάζουμε A'. Στη συνέχεια από το A' φέρουμε ευθεία μέχρι το Γ. Η θέση του B είναι το σημείο τομής της A'Γ με το κάτοπτρο. Γιατί η ΑΒΓ είναι η συντομότερη διαδρομή; λόγω συμμετρίας έχουμε:  $AB=A'B$  και  $\alpha=\alpha'$ . Ως ευθεία η διαδρομή A'BΓ είναι η συντομότερη δυνατή (αν μπορούσε να υπάρξει). Αλλά  $A'B\Gamma = A'B + B\Gamma \xrightarrow{A'B=AB} AB + B\Gamma \Rightarrow A'B\Gamma = AB\Gamma$ . Αφού λοιπόν η A'BΓ είναι η συντομότερη (ως ευθεία σε σχέση με κάθε τεθλασμένη) άρα και η ΑΒΓ είναι η συντομότερη διαδρομή.

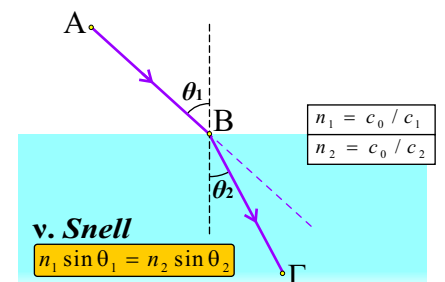
Επειδή τώρα η A'BΓ είναι ευθεία και το κάτοπτρο είναι επίσης ευθεία έχουμε  $\alpha'=\beta$  ως κατακορυφήν. Άρα (αφού  $\alpha=\alpha'$ ) και  $\alpha=\beta$ . Ορίζουμε λοιπόν το σημείο B έτσι ώστε οι ευθείες ΑΒ και ΒΓ να έχουν ίσες γωνίες ( $\alpha=\beta$ ) με το κάτοπτρο και αυτή η διαδρομή (ΑΒΓ) είναι η συντομότερη. Για ιστορικούς λόγους ο νόμος της ανάκλασης (του Νεύτωνα) παίρνει ως γωνίες τις συμπληρωματικές τους:

$\theta_i = \theta_r$



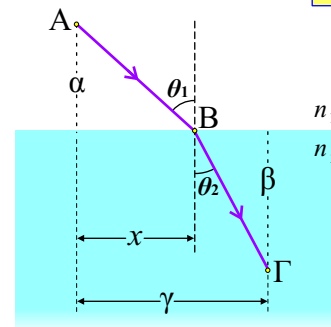
Φυσικά η παραπάνω απόδειξη είναι στην ουσία η απόδειξη της *αρχής του ελαχίστου δρόμου του Ήρωνα*, μιας και το φως κινείται και συνεχίζει να κινείται στο ίδιο οπτικό μέσο (με την ίδια ταχύτητα). Και ίδια ταχύτητα στην ίδια απόσταση σημαίνει ίδιος χρόνος.

Στη περίπτωση της διάθλασης η αρχή του ελαχίστου χρόνου παίρνει τις πραγματικές της διαστάσεις. Εκεί το φως πράγματι ακολουθεί την ελάχιστη διαδρομή, από πλευράς χρόνου και όχι την ελάχιστη από πλευράς μήκους. Η εφαρμογή της αρχής του *Fermat* μας δίνει διαδρομή για το φως σαν τη διπλανή και τον νόμο του *Snell* που μας υποδεικνύει τη θέση του σημείου B στο οποίο γίνεται τελικά η διέλευση του φωτός στο δεύτερο οπτικό μέσο, προκειμένου να πάει από το A στο Γ στον ελάχιστο χρόνο.



**Απόδειξη του νόμου του Snell απ' την αρχή του Fermat**

$$\left. \begin{aligned} t_1 = t_{AB} &= \frac{AB}{c_1} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{c_1} \\ t_2 = t_{BF} &= \frac{BF}{c_2} = \frac{\sqrt{\beta^2 + (\gamma - x)^2}}{c_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_{ολ.} = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{\beta^2 + (\gamma - x)^2}}{c_2} \quad (1)$$



Για να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος  $t_{ολ.}$  (ως συνάρτηση του  $x$ , που θα καθορίσει τη θέση B εισόδου της ακτίνας από το ένα μέσο στο άλλο) θα πρέπει:

$$\frac{dt}{dx} = 0 \quad \left[ \dots \text{και} \quad \frac{d^2t}{dx^2} > 0 \right]$$

$$\frac{dt}{dx} = 0 \xrightarrow{(1)} \frac{x}{c_1 \sqrt{\alpha^2 + x^2}} - \frac{\gamma - x}{c_2 \sqrt{\beta^2 + (\gamma - x)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{c_1 \sqrt{\alpha^2 + x^2}} = \frac{\gamma - x}{c_2 \sqrt{\beta^2 + (\gamma - x)^2}} \quad (2)$$

...όμως:  $\sin\theta_1 = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} \quad (3) \quad \& \quad \sin\theta_2 = \frac{\gamma - x}{BF} = \frac{\gamma - x}{\sqrt{\beta^2 + (\gamma - x)^2}} \quad (4)$



$$(2)/(3), (4): \frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2} \xrightarrow{c_1=c_0/n_1 \ \& \ c_2=c_0/n_2} \frac{\sin\theta_1}{c_0/n_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_0/n_2} \Rightarrow \frac{n_1 \sin\theta_1}{c_0} = \frac{n_2 \sin\theta_2}{c_0} \Rightarrow \boxed{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2}$$

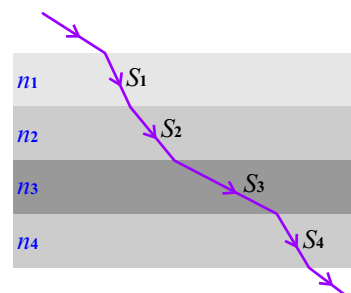
**νόμος του Snell**

...τέλος:  $\frac{d^2t}{dx^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{a^2 c_2 [\beta^2 + (\gamma - x)^2]^{3/2} + \beta c_1 (\alpha^2 + x^2)^{3/2}}{c_1 c_2 (\alpha^2 + x^2)^{3/2} [\beta^2 + (\gamma - x)^2]^{3/2}} > 0$  *Αφού όλες οι ποσότητες που την αποτελούν είναι θετικές.*

**ΘΕΜΑ 1 / α. / (ii)**

Ξεκινώντας από ένα οπτικό μέσο με πολλαπλά παράλληλα στρώματα σταθερών δεικτών διάθλασης, μπορούμε να πούμε ότι ο συνολικός χρόνος διέλευσης μιας ακτίνας φωτός θα είναι:

$$t = \frac{S_1}{c_1} + \frac{S_2}{c_2} + \dots \quad (1)$$



όπου  $S_1, S_2, \dots$  οι διαδρομές σε κάθε οπτικό μέσο και  $c_1, c_2, \dots$  οι αντίστοιχες ταχύτητες του φωτός μέσα σ' αυτά. Από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης:

$$c_1 = \frac{c_0}{n_1}, \quad c_2 = \frac{c_0}{n_2}, \quad \dots \quad \text{και τελικά ο χρόνος (1) γίνεται: } t = \frac{n_1 S_1}{c_0} + \frac{n_2 S_2}{c_0} + \dots \Rightarrow t = \sum_i \frac{n_i S_i}{c_0} \Rightarrow t = \frac{1}{c_0} \sum_i n_i S_i \quad (2)$$

Η ποσότητα  $\sum_i n_i S_i$  ορίζεται ως *οπτικός δρόμος* (Ο.Δ.) και σε ένα συνεχές (ανομοιογενές) υλικό με μεταβλητό δείκτη διάθλασης, μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα:

$$\text{Ο.Δ.} = \int_{\Sigma}^{\Sigma'} n(S) dS \quad (3)$$

Όπου  $n(S)$  ο δείκτης διάθλασης που εξαρτάται από τη διαδρομή  $S$  μεταξύ των σημείων  $\Sigma$  &  $\Sigma'$ .

Ο συνολικός χρόνος λοιπόν σε ένα τέτοιο ανομοιογενές μέσο είναι: (2)/(3):  $t = \frac{1}{c_0} \int_{\Sigma}^{\Sigma'} n(S) dS$  (4)

και η απαίτηση ελαχιστοποίησης του χρόνου μετατρέπεται σε απαίτηση ελαχιστοποίησης του οπτικού δρόμου (μιας και στην παραπάνω εξίσωση η ποσότητα  $1/c_0$  είναι πάντα σταθερή  $c_0^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} \text{ s/m}$ ).

Επομένως:

$$\delta \int_{\Sigma}^{\Sigma'} n(S) dS = 0$$

Η πραγματική διαδρομή την οποία ακολουθεί μια οπτική ακτίνα από ένα σημείο  $\Sigma$  σε ένα άλλο  $\Sigma'$  είναι εκείνη για την οποία ο οπτικός δρόμος είναι "στάσιμος" ως προς τις μεταβολές της διαδρομής.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ  
ΑΡΧΗ ΤΟΥ  
FERMAT



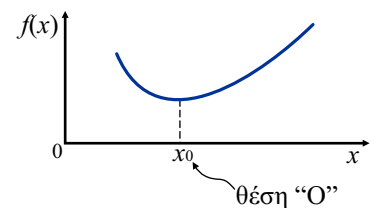
**Απόδειξη:**

Από την εξίσωση (4):  $\int_{\Sigma}^{\Sigma'} n(S) dS = c_0 t$  και για την διάδοση στη  $x$ -διεύθυνση έχουμε:

$$\int_{\Sigma}^{\Sigma'} n(x) dx = c_0 t(x) \Rightarrow f(x) = c_0 t(x) \quad (5)$$

$f(x) = \int_{\Sigma}^{\Sigma'} n(x) dx$  Ο οπτικός δρόμος όταν ο δείκτης διάθλασης είναι συνάρτηση μόνο της διεύθυνσης  $x$ .

Για να είναι ελάχιστος ο οπτικός δρόμος  $f(x)$  θα πρέπει να έχει ποιοτικά μια γραφική παράσταση σαν τη διπλανή και να παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση  $O$  με συντεταγμένη  $x_0$ .



Αναπτύσσοντας σε σειρά *Taylor* την (5) γύρω από τη θέση  $x_0$  έχουμε:

$$\delta x = x - x_0 \Rightarrow \delta f(x) = f(x) - f(x_0) = \left[ \frac{df(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot (\delta x) + \left[ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0} \cdot (\delta x)^2 + \dots$$

Ελάχιστο συνάρτησης έχουμε όταν η 1η παράγωγος μηδενίζεται και τελικά η  $\delta f(x)$  καταλήγει να είναι ανάλογη της  $(\delta x)^2$ . Αν λοιπόν δεχτούμε, με σφάλμα 2ης τάξης, ότι  $(\delta x)^2 \rightarrow 0$ , τότε  $\delta f(x) \approx 0$ . Έχουμε μηδενική διαφορά στον οπτικό δρόμο [ $\delta f(x) \approx 0$ ] όταν η 1η παράγωγος είναι μηδέν.

Η μαθηματική διατύπωση της αρχής του *Fermat* με βάσει τον γενικευμένο ορισμό του οπτικού δρόμου:

$$\int_{\Sigma}^{\Sigma'} n(S) dS \quad \text{και της απαίτησης } \delta f(x) \approx 0 \text{ γράφεται: } \delta \int_{\Sigma}^{\Sigma'} n(S) dS = 0$$

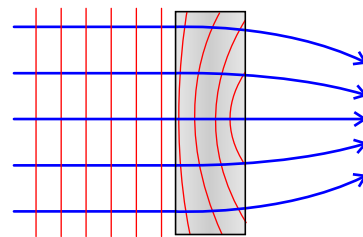
$\delta$ : αναφέρεται στη μεταβολή της τροχιάς [ η οποία μπορεί να συνεπάγεται και αλλαγή τη συνάρτηση  $f(x)$  ]

$d$ : διαφορικό: αναφέρεται στη μεταβολή της μεταβλητής  $x$  [ όπου για την παραπάνω σχέση  $x=S$  ]

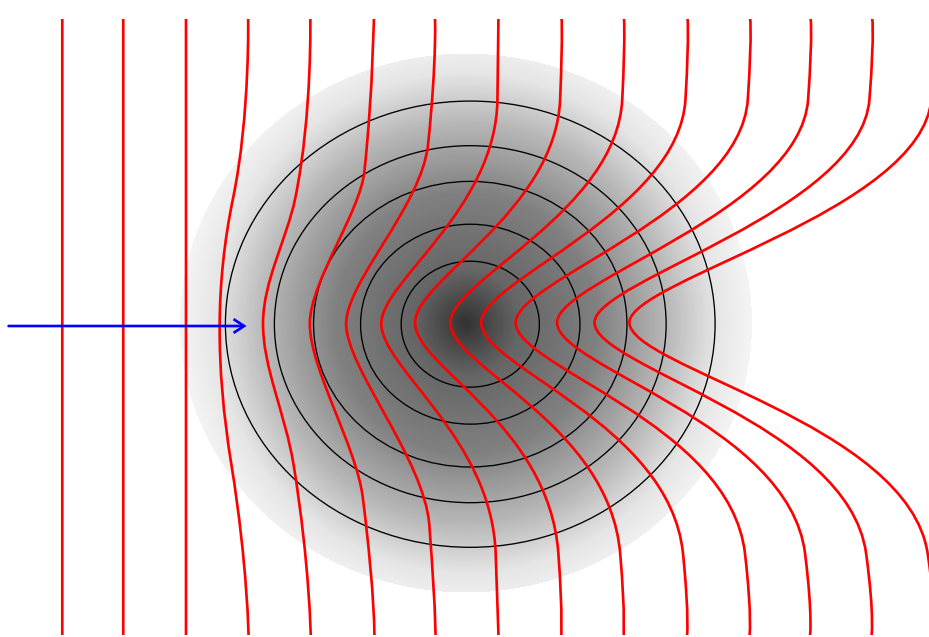
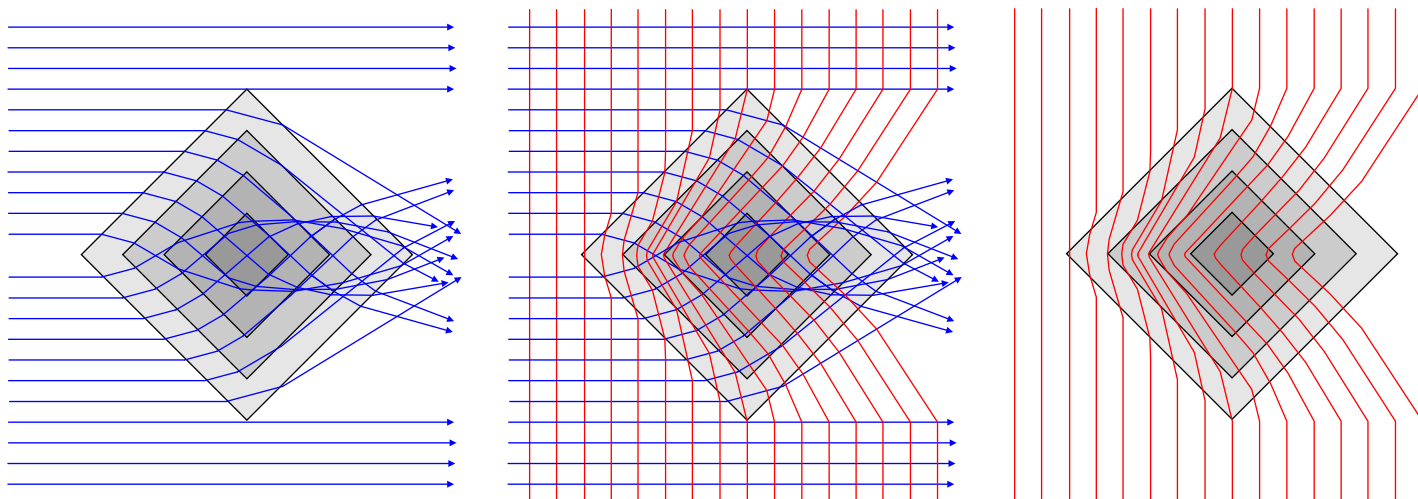
► Ο χαρακτηρισμός "στάσιμος" οπτικός δρόμος σημαίνει ότι σε μικρές αλλαγές (1ης τάξης) στην πορεία του φωτός, οι μεταβολές του οπτικού δρόμου είναι 2ης τάξης και άρα αμελητέες.

**ΘΕΜΑ 1 / α. / (iii)**

➔ Η περιοχή με το μεταβλητό δείκτη διάθλασης είναι ένας φακός GRIN. Πρόκειται για φακό με δείκτη διάθλασης που σταδιακά αυξάνεται προς το κέντρο του. Ο φακός αυτός παρουσιάζει ιδιότητες εστίασης επειδή τα κυμάτια *Huygens* δεν διαδίδονται τόσο γρήγορα στο κέντρο όσο στις άκρες. Ένα επίπεδο μέτωπο κύματος που φθάνει παράλληλα στο φακό, καθυστερεί στο κέντρο (μεγαλύτερος δείκτης - μικρότερη ταχύτητα), οπότε οι ακτίνες υφίστανται κάμψη προς το κέντρο.



» Για να σχεδιάσουμε τα μέτωπα κύματος του ερωτήματος εργαζόμαστε ως εξής: σχεδιάζουμε ένα οπτικό μέσο τετράγωνης διατομής με σταδιακά αλλά διακριτά τμήματα διαφορετικών δεικτών διάθλασης. Προς το εσωτερικό το μέσο γίνεται όλο και πυκνότερο δηλαδή οι δείκτες διάθλασης όλο και μεγαλώνουν. Σχεδιάζουμε τις ακτίνες φωτός παράλληλες και κατευθυνόμενες προς το μέσο. Οι ακτίνες κάμπτονται σύμφωνα με τα γνωστά (διάβαση από αραιό σε πυκνό: σύγκλιση προς την νοητή κάθετο και το αντίθετο). Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τα μέτωπα κύματος πάντα κάθετα στις ακτίνες. Τέλος σβήνουμε τις ακτίνες και μας μένουν μόνο τα μέτωπα. Φυσικά αυτό που βγάλαμε είναι μια χονδροειδής απεικόνιση της πραγματικότητας αφού όλα παρουσιάζονται ως τεθλασμένες. Ομαλοποιούμε τις τεθλασμένες σε καμπύλες και παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα.

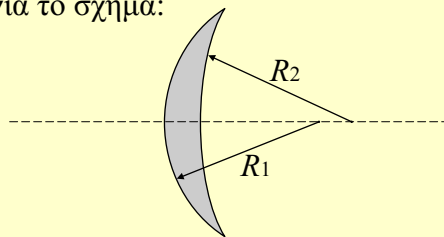


Τέλος να πούμε ότι εδώ παρουσιάσαμε μια απλή μορφή μετώπων κύματος χωρίς συμβολή του φωτός με τον εαυτό του στο πίσω μέρος του μέσου. Συμβολή έχουμε αν το μέσο είναι πολύ πυκνό στο εσωτερικό του, οπότε οι ακτίνες κάμπτονται αρκετά, ώστε να τέμνονται. Κάτι τέτοιο φαίνεται στο αρχικό σχήμα με τις τεθλασμένες ακτίνες.

**ΘΕΜΑ 1 / b.**

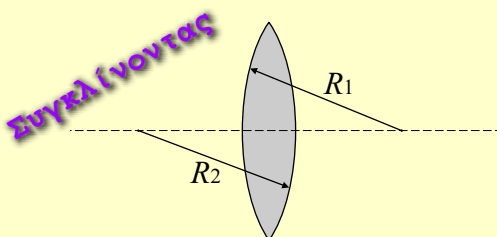
▶ Ο τύπος (27.11) του Feynman [σελ.27-5] λέει:  $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$  όπου:  $n = \frac{n_2}{n_1}$

Όμως  $n_1=1$  (αέρας) και  $n_2 = n =$  δείκτης διάθλασης γυαλίου για το εκάστοτε μήκος κύματος. Ο τύπος αυτός ισχύει για το σχήμα:



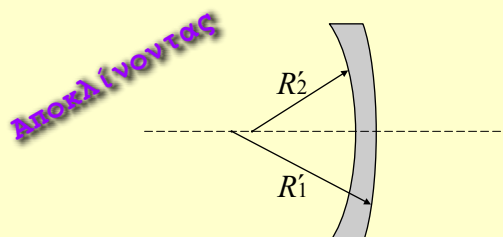
$R_1 > 0$  κέντρα καμπυλότητας  
 $R_2 > 0$  δεξιά του φακού,  
 [συνθήκη (3), σελ.27-3]

» Για τους φακούς που θα δούμε παρακάτω έχουμε αντίστοιχα:



Η ακτίνα  $R_2 < 0$  γιατί το κέντρο καμπυλότητας είναι αριστερά του φακού. Άρα η εστιακή απόσταση θα δίνεται από τον “μετασχηματισμένο” τύπο:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

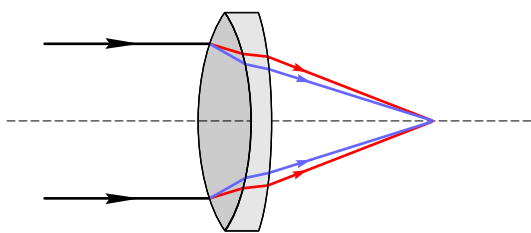


Η ακτίνες  $R_1 < 0$  &  $R_2 < 0$  γιατί τα κέντρα καμπυλότητας είναι αριστερά του φακού. Άρα η εστιακή απόσταση θα δίνεται από τον “διπλά μετασχηματισμένο” τύπο:

$$\frac{1}{f'} = (n'-1)\left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2'}\right)$$

**ΘΕΜΑ 1 / b. / (i)**

**ΑΧΡΩΣΤΙΚΟΙ ΦΑΚΟΙ**



Η συνολική εστιακή απόσταση του συστήματος θα είναι:

Αφού η ισχύς του συστήματος είναι  $I_{ολ.} = I_1 + I_2$  και  $I = 1/f$ .

$$\frac{1}{f_{ολ.}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{f_{ολ.}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + (n'-1)\left(-\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}\right)$$

Για δύο διαφορετικά μήκη κύματος (χρώματα) Α και Β, οι δείκτες διάθλασης είναι  $n_A$  και  $n_B$  για τον πρώτο φακό και  $n'_A$  και  $n'_B$  για τον δεύτερο φακό. Εφόσον έχει διορθωθεί το χρωματικό σφάλμα:  $f_{ολ.}^A = f_{ολ.}^B$ . Άρα:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f_{ολ.}^A} &= (n_A - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + (n'_A - 1)\left(-\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}\right) \\ \frac{1}{f_{ολ.}^B} &= (n_B - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + (n'_B - 1)\left(-\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}\right) \end{aligned} \right\} = \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n_A - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + (n'_A - 1)\left(-\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}\right) = (n_B - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + (n'_B - 1)\left(-\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}\right) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (n_A - 1 - n_B + 1) = \left( -\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) (n'_B - 1 - n'_A + 1) \Rightarrow$$

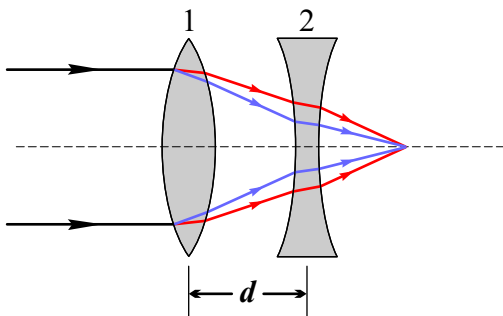
$$\Rightarrow \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (n_A - n_B) = \left( -\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) (n'_B - n'_A) \Rightarrow \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{-\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}} = \frac{n'_B - n'_A}{n_A - n_B} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{-\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}} = -\frac{n'_A - n'_B}{n_A - n_B}}$$

Αν λοιπόν κατασκευάσουμε σύστημα φακών που οι ακτίνες καμπυλότητάς τους να ικανοποιούν την παραπάνω σχέση, έχουμε σύμπτωση των εστιών για τα δύο χρώματα. Για κατάλληλη εκλογή των δύο χρωμάτων (συνήθως ερυθρό και κυανοπράσινο) έχουμε σύμπτωση για όλα τα χρώματα.

**ΘΕΜΑ 1 / b. / (ii)**

**ΑΠΟΧΡΩΜΑΤΙΚΟΙ ΦΑΚΟΙ**



Θεωρούμε ένα σύστημα δύο φακών, ενός συγκλίνοντα αμφίκυρτου και ενός αποκλίνοντα αμφίκυβου σε απόσταση  $d$  μεταξύ τους. Αν  $n$  ο κοινός δείκτης διάθλασης του γυαλιού των φακών και  $R_1, R_2, R'_1, R'_2$  οι αντίστοιχες ακτίνες καμπυλότητας έχουμε (σύμφωνα με την ανάλυση του τύπου (27.11) του Feynman που κάναμε στο Θ1/b/i):

$$\frac{1}{f_1} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1)$$

επειδή οι πλευρές του είναι κοίλες άρα οι ακτίνες είναι σε αντίθετη πλευρά απ' ότι αν ήταν κυρτές.

$$\frac{1}{f_2} = (n - 1) \left( -\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} \right) = -(n - 1) \left( \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) \quad (2)$$

Για τη συνολική εστιακή απόσταση συστήματος λεπτών φακών σε απόσταση  $d$  γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{1}{f_{\text{ολ.}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \quad (3)$$

Η ζητούμενη απόσταση  $d$  ώστε να έχουμε αχρωματικότητα είναι:

$$\boxed{d = \frac{f_1 + f_2}{2}} \quad (4)$$

**Απόδειξη:**

Έστω δύο διαφορετικά μήκη κύματος (χρώματα) Α και Β με δείκτες διάθλασης για το συγκεκριμένο γυαλί  $n_A$  και  $n_B$  (κοινοί για τους δύο φακούς, μιας και αποτελούνται από το ίδιο υλικό).

$$(3)/(4): \frac{1}{f_{\text{ολ.}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{f_1 + f_2}{2f_1 f_2} = \frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2} - \frac{f_1 + f_2}{2f_1 f_2} \Rightarrow \frac{1}{f_{\text{ολ.}}} = \frac{f_1 + f_2}{2f_1 f_2} \Rightarrow \frac{1}{f_{\text{ολ.}}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) \quad (5)$$

Η συνολική εστιακή απόσταση για τις δύο ακτινοβολίες Α και Β θα πρέπει να είναι ίδια, δηλαδή τα δύο χρώματα να εστιάζουν στο ίδιο σημείο ώστε να έχουμε αχρωματικότητα. Άρα:

$$f_{\text{ολ.}}^A = f_{\text{ολ.}}^B \Rightarrow \frac{1}{f_{\text{ολ.}}^A} = \frac{1}{f_{\text{ολ.}}^B} \xrightarrow{(5)} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f_1^A} + \frac{1}{f_2^A} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f_1^B} + \frac{1}{f_2^B} \right) \Rightarrow \frac{1}{f_1^A} + \frac{1}{f_2^A} = \frac{1}{f_1^B} + \frac{1}{f_2^B} \Rightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \stackrel{(2)}{(n_A - 1)} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - (n_A - 1) \left( \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) = (n_B - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - (n_B - 1) \left( \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) \Rightarrow$$

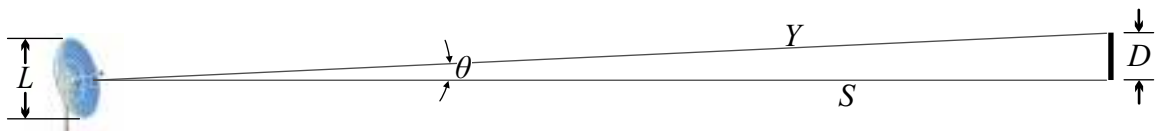
$$\Rightarrow (n_A - 1 - n_B + 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (n_A - 1 - n_B + 1) \left( \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}} \quad (6)$$

Ανεξάρτητο των δεικτών  
διάθλασης  $n_A$  και  $n_B$ .

➤ Αν λοιπόν τοποθετήσουμε δύο λεπτούς φακούς (συγκλίνοντα & αποκλίνοντα) σε απόσταση  $d=(f_1+f_2)/2$  με ακτίνες καμπυλότητας που συνδέονται με τη σχέση (6), τότε έχουμε πετύχει αχρωματικότητα (ο δεύτερος φακός διορθώνει το σφάλμα του πρώτου).

### ΘΕΜΑ 2 / α. / (i)

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ S &= 10 \text{ km} = 10^4 \text{ m} \\ D &= 1 \text{ m} \\ L &= ? \end{aligned}$$



Σύμφωνα με την παράγραφο 30-4 του Feynman, η διακριτική (γωνιακή) ικανότητα ενός παραβολικού κατόπτρου είναι:

Ο παράγοντας 1.22 οφείλεται στο γεγονός ότι τα άκρα του κατόπτρου "πιάνουν λιγότερο σήμα" απ' ό,τι τα εσωτερικά σημεία του και έτσι η "χρήσιμη" (effective) διάμετρος είναι λίγο μικρότερη απ' ό,τι η "πραγματική" (true). Το "λιγότερο μικρότερη" είναι ένας παράγοντας 0.819 (δηλαδή  $L_{\text{eff}}=0.819L_{\text{true}}$ ) ο οποίος στο κλάσμα αντιστρέφεται σε  $0.819^{-1}=1.22$

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{L}$$

με  $\lambda$  το μήκος κύματος της ακτινοβολίας και  $L$  η διάμετρος του κατόπτρου

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς τη διάμετρο  $L$  έχουμε:  $L = \frac{1.22\lambda}{\theta} \quad (1)$

Σύμφωνα με το σχήμα:  $\sin \theta = \frac{D}{Y} = \frac{D}{\sqrt{D^2 + S^2}} \Rightarrow \theta = \sin^{-1} \frac{D}{\sqrt{D^2 + S^2}} \quad (2)$

$$(1)/(2): L = \frac{1.22\lambda}{\sin^{-1} \frac{D}{\sqrt{D^2 + S^2}}} = \frac{1.22 \cdot 10^{-2}}{\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1^2 + (10^4)^2}}} = \frac{1.22 \cdot 10^{-2}}{\sin^{-1}(9.99999995 \cdot 10^{-5})} = \frac{1.22 \cdot 10^{-2}}{5.729577932 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{L = 2.1293 \text{ m}}$$

...ή περίπου

$$\boxed{L = 2.13 \text{ m}}$$

**ΘΕΜΑ 2 / α. / (ii)**

Η τιμή που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι μια λογική τιμή για στρατιωτικό παραβολικό radar. Το πρόβλημα που ανακύπτει έχει να κάνει με την απολεσματικότητα ενός τέτοιου radar σε σχέση με την απόστασή του από το αντικείμενο (αεροσκάφος) που θέλει να ανιχνεύσει. Τα σημερινά αεροσκάφη έχουν πολύ μεγάλες ταχύτητες. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις μέσες ταχύτητες πτήσης (όχι τις μέγιστες) ορισμένων πολεμικών αεροσκαφών:



**F-16 Block:  $v > 300$  m/s**



**SU-47 Berkut:  $v > 380$  m/s**



**SR-71 BlackBird:  $v > 1000$  m/s**

Με αυτές τις ταχύτητες τα αεροπλάνα θα έφταναν στον στόχο τους (ας πούμε ότι ήταν το ίδιο το radar στα 10 km) σε 33, 26, 10 sec από τη στιγμή της ανίχνευσής τους (ίσως οι χειριστές του radar να προλάβουν να κάνουν το σταυρό τους, ίσως και όχι...).

Επομένως για ανίχνευση σε μακρινές αποστάσεις και σύμφωνα με τον τύπο  $L = 1.22\lambda / \sin^{-1} \frac{D}{\sqrt{D^2 + S^2}}$  βρίσκουμε τις ακόλουθες τιμές διαμέτρου  $L$  για αντίστοιχες αποστάσεις  $S$ :

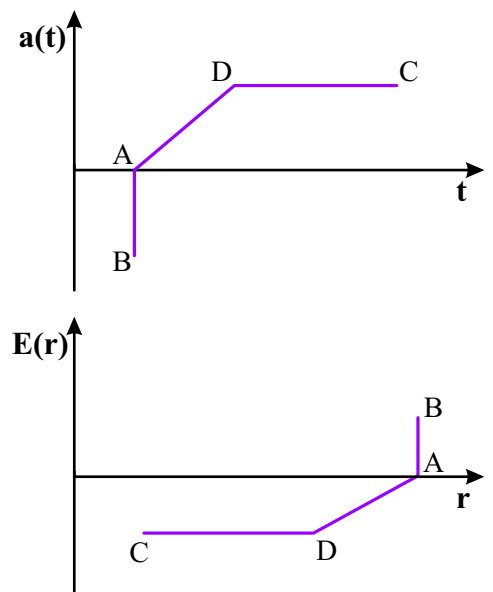
$S$ (km)	10	20	30	40	50
$L$ (m)	2.13	4.26	6.39	8.52	10.64

Προφανώς πηγαίνουμε σε διαμέτρους ραδιοτηλεσκοπίων και όχι στρατιωτικών radar, που συνήθως είναι και μεταφερόμενα ή αυτοκινούμενα. Η λύση που προτείνεται είναι ο συνδιασμός πολλών μονάδων radar συνδεδεμένων μεταξύ τους, στο μοτίβο των αντίστοιχων διατάξεων των ραδιοτηλεσκοπίων, όπως το VLA στο Socorro του Νέου Μεξικό των ΗΠΑ. Με αυτόν τον τρόπο μεγαλώνει σημαντικά η ισοδύναμη διάμετρος  $L$  και μικραίνει το όριο  $\lambda/L$  που είναι ο όρος που προσδιορίζει το όριο περίθλασης (βάσει του οποίου ξεχωρίζει αν το ίχνος που “βλέπει” το radar είναι ένα ή περισσότερα του ενός αεροσκάφη).



**ΘΕΜΑ 2 / α. / (iii)**

Σε κάθε σημείο, το πεδίο  $E$  καθορίζεται από την επιτάχυνση του φορτίου σε έναν προηγούμενο χρόνο ( $t' = t - r/c$  όπου  $r/c$  η χρονική καθυστέρηση). Το πεδίο σε όλο και πιο απομακρυσμένα σημεία θα καθορίζεται από την επιτάχυνση σε όλο και προγενέστερες χρονικές στιγμές (όσο πιο “παλιά” έγινε η κίνηση τόσο πιο “μακριά” έχει προλάβει να ταξιδέψει τώρα, το πεδίο που δημιουργήθηκε τότε). Η γραφική παράσταση  $E(r)$  θα μπορούσαμε να πούμε πως είναι τρόπον τινά μια “αναποδογυρισμένη” (έτσι  $\rightleftharpoons$  &  $\updownarrow$ ) γραφική της  $a(t)$  [“αντίστροφο” διάγραμμα].



**⚠️ Θα ήθελα εδώ να εκφράσω τη διαφωνία μου με την εκφώνηση. Θεωρώ ότι το τμήμα AB του διαγράμματος  $a(t)$  είναι λάθος, διότι παρουσιάζει άπειρες τιμές επιτάχυνσης, την ίδια χρονική στιγμή. Εφόσον μιλάμε για ηλεκτρόνια, αυτά δεν θα ήταν δυνατόν να επιταχύνονται με πολλές διαφορετικές επιταχύνσεις την ίδια χρονική στιγμή...**



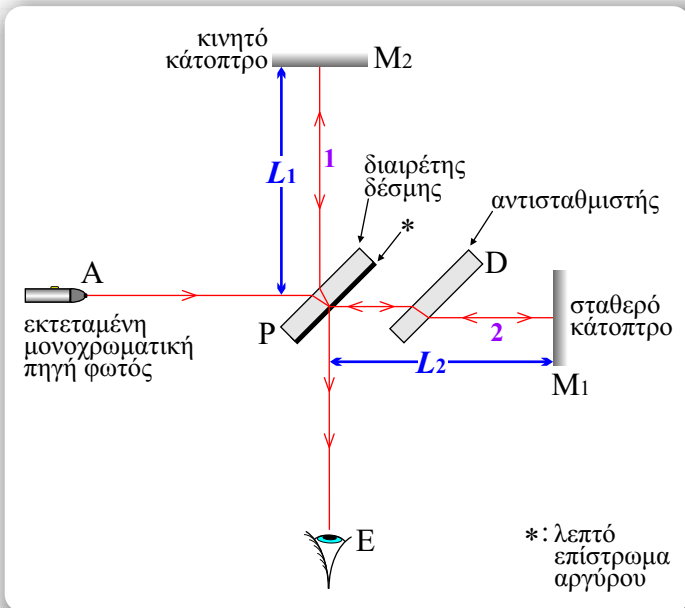
**ΘΕΜΑ 2 / b. / (ii)**

Ο αντισταθμιστής D μπαίνει για να γίνουν οι δρόμοι των δύο δεσμών, μέσα στα γυαλιά, ίδιοι. Ο αντισταθμιστής κόβεται από το ίδιο πλακίδιο γυαλιού, όπως και ο διαχωριστής.

Ακτίνα από το Α:

$$AP \rightarrow \begin{cases} PM_2 \rightarrow M_2P \rightarrow PE \\ PD \rightarrow DM_1 \rightarrow M_1D \rightarrow DP \rightarrow PE \end{cases}$$

- \* Αν  $L_1=L_2$  και  $M_1 \perp M_2$  τότε το είδωλο του  $M_1$  στο P συμπίπτει με το  $M_2$ .
- \* Αν  $L_1 \neq L_2$  τότε το είδωλο του  $M_1$  είναι ελαφρώς μετατοπισμένο σε σχέση με το  $M_2$ .
- \* Αν  $M_1 \neq M_2$  τότε το  $M_2$  και το είδωλο του  $M_1$  παίζουν τους ίδιους ρόλους όπως οι δύο επιφάνειες ενός λεπτού υμενίου και το φως που ανακλάται σε αυτές σχηματίζει το ίδιο είδος κροσσών.

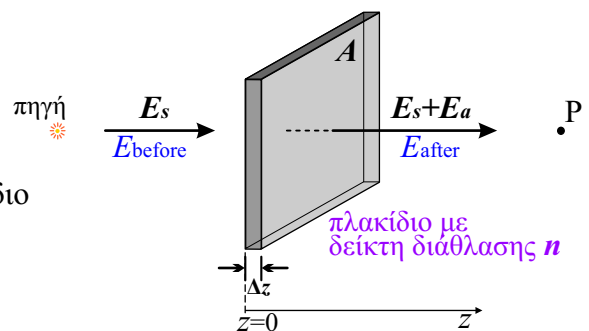


- ➔ Υποθέτουμε ότι η γωνία μεταξύ  $M_2$  και του ειδώλου  $M_1$  είναι αρκετά μεγάλη ώστε να έχουμε 5-6 κροσσούς.
- ➔ Μετακινούμε αργά το  $M_2$ , μπρος ή πίσω κατά  $\lambda/2$  και το “ενεργό πάχος” του “υμενίου” μεταβάλλεται κατά  $\lambda$ . Τότε κάθε κροσσός μετακινείται αριστερά ή δεξιά κατά απόσταση ίση με τη διαχωριστική απόσταση των κροσσών.
- ➔ Εστω  $x$  η μετακίνηση του  $M_2$  και  $m$  οι αντίστοιχοι κροσσοί που μετακινήθηκαν.
- ➔ Προκύπτει η σχέση  $x=m\lambda/2$  και επομένως το μήκος κύματος μπορεί να μετρηθεί ακριβώς από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{2x}{m}$$

**ΘΕΜΑ 3 / i**

- »  $E_{before} = E_s = E_0 e^{i\omega(t-z/c)}$  : προσπίπτων κύμα
- »  $t_1 = \Delta z / c$  : χρόνος διέλευσης στο  $\Delta z$  αν δεν υπήρχε το πλακίδιο
- »  $t_{πραγμ.} = \frac{\Delta z}{v} = \frac{\Delta z}{c/n} = n \frac{\Delta z}{c}$  : πραγματικός χρόνος διέλευσης
- »  $\Delta t = t_{πραγμ.} - t_1 = (n-1) \frac{\Delta z}{c}$  : χρονική καθυστέρηση μέσα στο πλακίδιο



$$E_{after} = E_0 e^{i\omega[(t-\Delta t)-z/c]} = E_0 e^{i\omega[t-(n-1)\Delta z/c-z/c]} = e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow E_{after} = e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} E_{before} \quad \text{: κύμα μετά το πλακίδιο}$$

- ❖ Taylor:  $e^x \approx 1 + x$  ...όταν  $x$ : μικρό
- ❖ Αντίστοιχα επειδή  $\Delta z$ : μικρό έχουμε:  $e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} \approx 1 - i\omega(n-1) \frac{\Delta z}{c}$

$$\gg (1): E_{after} = \left(1 - i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c}\right) E_0 e^{i\omega(t-z/c)} = \underbrace{E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_{before} (E_s)} - \underbrace{\frac{i\omega(n-1)\Delta z}{c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_a}$$

$\gg$  άρα:  $E_a = -\frac{i\omega(n-1)\Delta z}{c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}$  (I) : πεδίο που δημιουργείται μέσα στο πλακίδιο λόγω ταλάντωσης των  $e^-$  του πλακιδίου από τον εξαναγκασμό του  $E_s$ .

Στη θέση  $z=0$  το πεδίο  $E_s = E_0 e^{i\omega(t-z/c)}$  γίνεται  $E_s = E_0 e^{i\omega t}$ . Το πεδίο αυτό ταλαντώνει τα  $e^-$  του πλακιδίου. Η εξίσωση ταλάντωσης των  $e^-$  του πλακιδίου στη θέση  $z=0$  είναι:

$$m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = F \quad \dots \text{όπου: } F = q_e E_s^{z=0} = q_e E_0 e^{i\omega t}$$

Άρα η Διαφορική Εξίσωση της ταλάντωσης των  $e^-$  του πλακιδίου είναι:  $m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = q_e E_0 e^{i\omega t}$

Η λύση της είναι της μορφής  $x = x_0 e^{i\omega t}$  με το  $x_0$  να το βρίσκουμε από την αντικατάσταση της λύσης στη Δ.Ε.:

$$m \left( \frac{d^2 (x_0 e^{i\omega t})}{dt^2} + \omega_0^2 x_0 e^{i\omega t} \right) = q_e E_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \dots \Rightarrow x_0 = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2)$$

...και τελικά η λύση γίνεται:  $x = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}$

$\gg$  Γνωρίζουμε επίσης ότι:  $E_a = -\frac{\eta q_e}{2\epsilon_0 c} i\omega x_0 e^{i\omega(t-z/c)} \xrightarrow{(2)} E_a = -\frac{\eta q_e}{2\epsilon_0 c} i\omega \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega(t-z/c)}$  (II)

$\gg$  (I)/(II):  $-\frac{i\omega(n-1)\Delta z}{c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)} = -\frac{\eta q_e}{2\epsilon_0 c} i\omega \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega(t-z/c)} \Rightarrow (n-1)\Delta z = \frac{\eta q_e^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} \rightarrow$

$\xrightarrow{\eta=N\cdot\Delta z} (n-1)\Delta z = \frac{N\Delta z q_e^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} \Rightarrow n = 1 + \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$   
**ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ**

$n$  : δείκτης διάθλασης  
 $A$  : επιφάνεια  
 $V$  : όγκος  
 $\eta = \frac{\text{αρ.ατόμων}}{A}$   
 $N = \frac{\text{αρ.ατόμων}}{V} =$   
 $= \frac{\text{αρ.ατόμων}}{A \cdot \Delta z} = \frac{\eta}{\Delta z} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \boxed{\eta = N \cdot \Delta z}$

**Διορθώσεις στην Εξίσωση Διασποράς**

❖ Τα άτομα-ταλαντωτές θα πρέπει να παρουσιάζουν απόσβεση, αλλιώς το πλακίδιο θα ακτινοβολούσε για πάντα από μόνο του μόλις το  $E_s$  έπεφτε πάνω του. Άρα ο όρος  $\omega_0^2 - \omega^2$  της εξίσωσης (2) και κατά συνέπεια και της εξίσωσης διασποράς θα πρέπει να γίνει  $\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega$  όπου  $\gamma$  ο συντελεστής απόσβεσης της ταλάντωσης των ηλεκτρονίων.

❖ Υπάρχουν πολλές συχνότητες συντονισμού για κάθε άτομο. Έτσι υπάρχουν πολλές διαφορετικές ταλαντώσεις για κάθε άτομο, κάθε μια από τις οποίες δρ ανεξάρτητα από τις άλλες και **αθροιστικά** ( $\sum_k$ ). Έτσι  $N \rightarrow Nk$ : αριθμός  $e^-$  / μονάδα όγκου με συχνότητα συντονισμού  $\omega_k$  και συντελεστή απόσβεσης  $\gamma_k$ .

Με τις παραπάνω διορθώσεις η εξίσωση διασποράς γίνεται:

$$n = 1 + \frac{q_e^2}{2\epsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}$$

**ΘΕΜΑ 3 / ii**

Ο προηγούμενος τύπος έχει και μιγαδικό μέρος. Έτσι μπορεί να γραφεί ως  $n = n' - in''$

( $n', n''$  : θετικοί, πραγματικοί)

Η εξίσωση (1), με την νέα γραφή του  $n$  γίνεται:

$$E_{after} = e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)} \xrightarrow{n=n'-in''} E_{after} = e^{-i\omega[(n'-in'')-1]\Delta z/c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)} = \dots = \underbrace{e^{-\omega n' \Delta z/c}}_A \cdot \underbrace{e^{-i\omega(n''-1)\Delta z/c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_B$$

» B: όπως και πριν: κύμα με καθυστέρηση φάσης κατά γωνία  $\omega(n''-1)\Delta z/c$  κατά τη διάβασή του μέσα στο πλακίδιο.

Το πραγματικό μέρος του  $n$  εκφράζει την καθυστέρηση φάσης του κύματος  $n'$

» A: εκθετικό με αρνητικό πραγματικό εκθέτη (άρα  $A < 1$ ). Περιγράφει μια μείωση στο πλάτος του κύματος, ανάλογη του πάχους  $\Delta z$  του πλακιδίου. Το κύμα εξέρχεται από το πλακίδιο με μικρότερο πλάτος άρα με μικρότερη ενέργεια.

Το φανταστικό μέρος του  $n$  εκφράζει την απορρόφηση του κύματος μέσα στο υλικό (δείκτης απορρόφησης).  $n''$

**ΘΕΜΑ 3 / iii**

Ο τύπος (I) της εκφώνησης για τα πυκνά υλικά, αν λύσουμε ως προς  $n$ , γίνεται:

$$n^2 = 1 + \frac{q_e^2}{m\epsilon_0} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega} \Rightarrow n = \sqrt{1 + \frac{q_e^2}{m\epsilon_0} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}}$$

Όταν όμως το υλικό είναι αραιό, όταν δηλαδή:  $n \rightarrow 1$  τότε ο όρος  $\frac{q_e^2}{m\epsilon_0} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}$  είναι πολύ μικρός.

❖ **Taylor:**  $(1+x)^v \xrightarrow{x: \text{μικρό}} 1 + vx \Rightarrow \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \xrightarrow{x: \text{μικρό}} 1 + \frac{1}{2}x$

$$n = \sqrt{1 + \frac{q_e^2}{m\epsilon_0} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}} = \left( 1 + \frac{q_e^2}{m\epsilon_0} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega} \right)^{1/2} \xrightarrow{\text{Taylor}} 1 + \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{m\epsilon_0} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}$$

που είναι ο τύπος (31.20) για τα αραιά υλικά

**ΘΕΜΑ 3 / iv**

»  $n_{fused\ silica}^2 = 1 + \frac{q_e^2}{m\epsilon_0} \sum_{k=1}^3 \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega} \xrightarrow{\text{real part}} 1 + \frac{q_e^2}{m\epsilon_0} \frac{N_1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{q_e^2}{m\epsilon_0} \frac{N_2}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{q_e^2}{m\epsilon_0} \frac{N_3}{\omega_3^2 - \omega^2}$  (\*)

$$\begin{aligned} \gg \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2} &\xrightarrow{\omega=2\pi\nu=2\pi\frac{c}{\lambda}} \frac{N_k}{\left(\frac{2\pi c}{\lambda_k}\right)^2 - \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2} = \frac{N_k}{\frac{4\pi^2 c^2}{\lambda_k^2} - \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2}} = \frac{N_k}{\frac{4\pi^2 c^2 \lambda^2 - 4\pi^2 c^2 \lambda_k^2}{\lambda_k^2 \lambda^2}} = \frac{N_k \lambda_k^2 \lambda^2}{4\pi^2 c^2 \lambda^2 - 4\pi^2 c^2 \lambda_k^2} = \\ &= \frac{N_k \lambda_k^2 \lambda^2}{4\pi^2 c^2 (\lambda^2 - \lambda_k^2)} \xrightarrow{\times \frac{q_e^2}{m\epsilon_0}} \frac{q_e^2}{m\epsilon_0} \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2} = \frac{q_e^2}{m\epsilon_0} \frac{N_k \lambda_k^2 \lambda^2}{4\pi^2 c^2 (\lambda^2 - \lambda_k^2)} = \frac{\left[ \frac{q_e^2 N_k \lambda_k^2}{m\epsilon_0 4\pi^2 c^2} \right] \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (**) \end{aligned}$$



$$\gg (*)/(**): n_{fused\ silica}^2 = 1 + \frac{\left[ \frac{q_e^2 N_1 \lambda_1^2}{m \epsilon_0 4 \pi^2 c^2} \right] \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{\left[ \frac{q_e^2 N_2 \lambda_2^2}{m \epsilon_0 4 \pi^2 c^2} \right] \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \frac{\left[ \frac{q_e^2 N_3 \lambda_3^2}{m \epsilon_0 4 \pi^2 c^2} \right] \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_3^2} = 1 + \frac{X_1 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{X_2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \frac{X_3 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_3^2}$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω έκφραση με την έκφραση της εκφώνησης:

$$n^2 = 1 + \frac{0.69616630 \lambda^2}{\lambda^2 - 0.0684043^2} + \frac{0.4079426 \lambda^2}{\lambda^2 - 0.1162414^2} + \frac{0.8974794 \lambda^2}{\lambda^2 - 9.896161^2}$$

Έχουμε τα ζητούμενα μήκη κύματος:

$$\lambda_1 = 0.0684043 \mu m$$

$$\lambda_2 = 0.1162414 \mu m$$

$$\lambda_3 = 9.8961610 \mu m$$



Επομένως η ζητούμενη περιοχή μηκών κύματος είναι:

$$0.0684043 \mu m - 9.8961610 \mu m$$

### ΘΕΜΑ 3 / v / 1

$$v_1 = 1.9 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$v_2 = 2.0 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$v_3 = 2.1 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$c = \lambda v \Rightarrow \lambda = \frac{c}{v}$$

$$\lambda_1 = \frac{c}{v_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.9 \cdot 10^{15}} = 1.578947 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0.1578947 \mu m$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{v_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{2.0 \cdot 10^{15}} = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0.15 \mu m$$

$$\lambda_3 = \frac{c}{v_3} = \frac{3 \cdot 10^8}{2.1 \cdot 10^{15}} = 1.428571 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0.1428571 \mu m$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στον τύπο (II) της εκφώνησης έχουμε τους τρεις δείκτες διάθλασης για τις τρεις ακτινοβολίες:

$$n_1^2 = 1 + \frac{0.69616630 \cdot 0.1578947^2}{0.1578947^2 - 0.0684043^2} + \frac{0.4079426 \cdot 0.1578947^2}{0.1578947^2 - 0.1162414^2} + \frac{0.8974794 \cdot 0.1578947^2}{0.1578947^2 - 9.896161^2} =$$

$$= 1 + 0.8570162 + 0.8906735 - 0.0002285 = 2.747461 \Rightarrow n_1 = \sqrt{2.747461} \Rightarrow n_1 = 1.6557547$$

$$n_2^2 = 1 + \frac{0.69616630 \cdot 0.15^2}{0.15^2 - 0.0684043^2} + \frac{0.4079426 \cdot 0.15^2}{0.15^2 - 0.1162414^2} + \frac{0.8974794 \cdot 0.15^2}{0.15^2 - 9.896161^2} =$$

$$= 1 + 0.8789558 + 1.021222 - 0.0002062 = 2.8999716 \Rightarrow n_2 = \sqrt{2.8999716} \Rightarrow n_2 = 1.702930$$

$$n_3^2 = 1 + \frac{0.69616630 \cdot 0.1428571^2}{0.1428571^2 - 0.0684043^2} + \frac{0.4079426 \cdot 0.1428571^2}{0.1428571^2 - 0.1162414^2} + \frac{0.8974794 \cdot 0.1428571^2}{0.1428571^2 - 9.896161^2} =$$

$$= 1 + 0.9032605 + 1.207257 - 0.0001871 = 3.110331 \Rightarrow n_3 = \sqrt{3.110331} \Rightarrow n_3 = 1.763613 \quad \text{αμήν!}$$

## ΘΕΜΑ 3 / v / 2

Οι κυματαριθμοί για τα τρία επίπεδα κύματα είναι:  $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{0.1578947} = 39.79348 \mu\text{m}^{-1}$

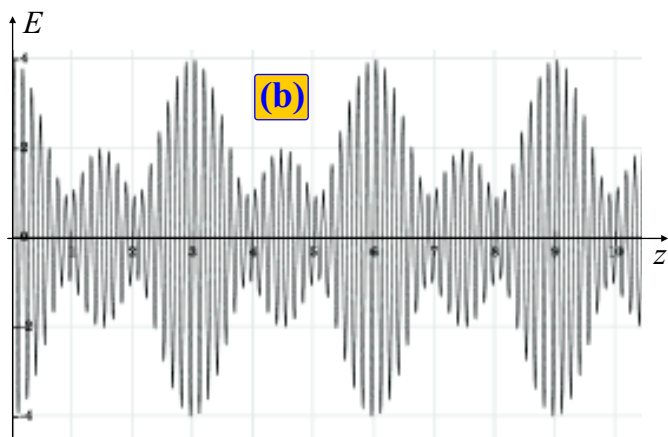
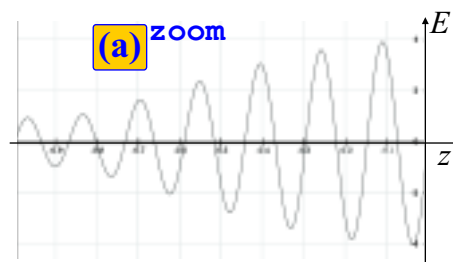
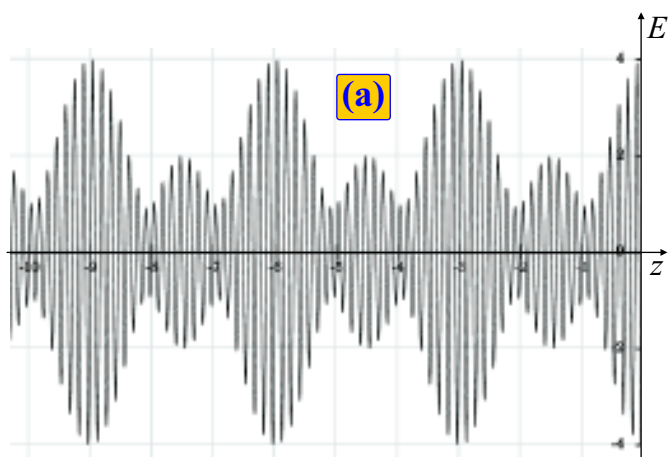
$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{0.15} = 41.887866 \mu\text{m}^{-1}$$

$$k_3 = \frac{2\pi}{\lambda_3} = \frac{2\pi}{0.1428571} = 43.982273 \mu\text{m}^{-1}$$

Οι εξισώσεις των τριών κυμάτων για τις συνθήκες της εκφώνησης είναι:

	$t=0, z < 0$		$t=T, z > 0$
$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_1^0 \sin(k_1 z - \omega_1 t) \\ A_2 &= A_2^0 \sin(k_2 z - \omega_2 t) \\ A_3 &= A_3^0 \sin(k_3 z - \omega_3 t) \end{aligned} \right\}$	$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 \sin(39.79348z) \\ A_2 &= 1 \sin(41.887866z) \\ A_3 &= 2 \sin(43.982273z) \end{aligned} \right\} \text{(a)}$		$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 \sin(39.79348z - 2\pi) \\ A_2 &= 1 \sin(41.887866z - 2\pi) \\ A_3 &= 2 \sin(43.982273z - 2\pi) \end{aligned} \right\} \text{(b)}$

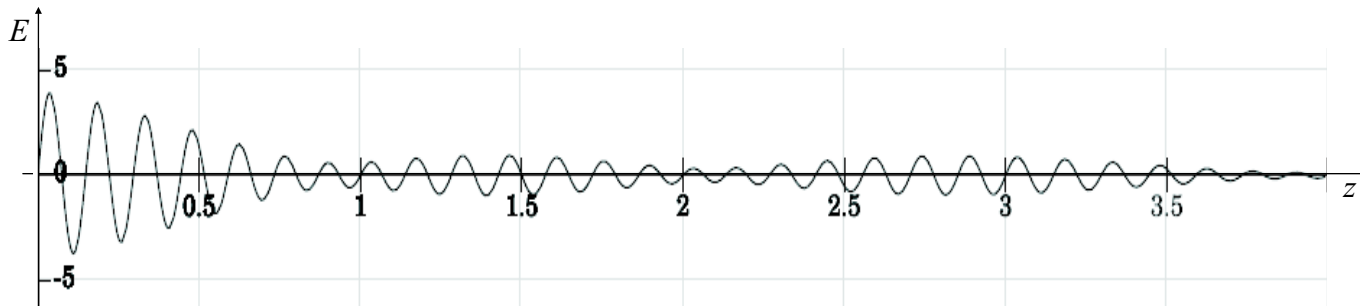
Οι τελικές κυματομορφές **(a)** και **(b)** θα δίνονται από την σχέση:  $E = A_1 + A_2 + A_3$ . Οι γραφικές παραστάσεις είναι η σύνθεση των τριών γραφικών των  $A_1(z)$ ,  $A_2(z)$ ,  $A_3(z)$  σε κάθε περίπτωση:



Παρατηρούμε ότι το κύμα μέσα στο υλικό διαδίδεται με πανομοιότυπο τρόπο, αφού για  $t=T$  έχουμε μια μετατόπιση φάσης  $\omega t = (2\pi/T)T = 2\pi$  rad.

**ΘΕΜΑ 3 / ν / 3**

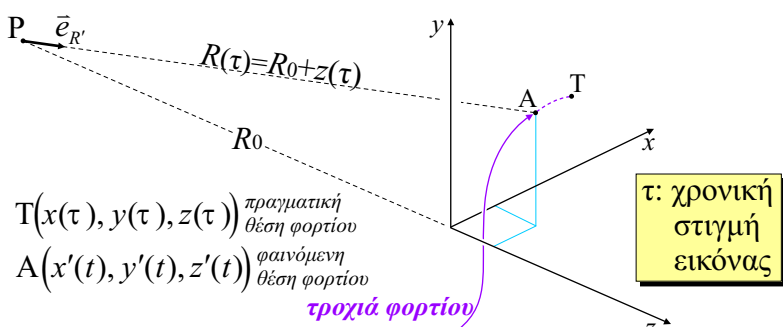
Λαμβάνοντας υπ' όψιν και το μιγαδικό μέρος του δείκτη διάθλασης, είναι σαν να υπολογίζουμε και την απορρόφηση (λόγω του  $i\gamma$ ) του κύματος μέσα στο υλικό. Αυτή προκαλείται από έναν εκθετικό όρο  $e^{-\omega n'' \Delta z / c}$  που τελικά μετατρέπει το συνολικό κύμα σε ένα φθίνον κύμα. Παρατηρούμε ότι αν έχουμε ένα αρκετά μεγάλο πλακίδιο ( $\Delta z$ : πολύ μεγάλο) το κύμα δεν θα βγει από την άλλη, δηλαδή θα απορροφηθεί τελείως (είναι όπως η περίπτωση που κοιτάμε μέσα στη θάλασσα, κάτω από την επιφάνεια, παράλληλα προς τον βυθό. Μπορούμε να δούμε μόνο μερικά μέτρα, σε αντίθεση με την αντίστοιχη ορατότητά μας στον αέρα).



**ΘΕΜΑ 4 / α**

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ένα κινούμενο φορτίο σε μακρινή απόσταση είναι:

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \vec{e}_{R'}}{dt^2} \quad (1)$$



$\vec{e}_{R'}$ : μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει την “φαινόμενη” θέση του φορτίου (λόγω της απόστασης  $R_0$  φορτίου-παρατηρητή, το σήμα καθυστερεί κατά  $R_0/c$  να φτάσει και έτσι το φορτίο “φαίνεται” σε διαφορετική θέση απ’ ότι “είναι”).

Επειδή το  $R_0$  είναι πολύ μεγάλο και στη διεύθυνση  $z$ , η κατεύθυνση του μοναδιαίου κυρίως εξαρτάται από τα  $x$  και  $y$ . Οι εγκάρσιες συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος είναι  $x/R$  και  $y/R$ , οι παράγωγοι των οποίων είναι:

$$\rightarrow \frac{d(x/R)}{dt} = R^{-1} \frac{dx}{dt} + x \frac{dR^{-1}}{dt} = R^{-1} \frac{dx}{dt} + x(-1)R^{-2} \frac{dR}{dt} = R^{-1} \frac{dx}{dt} - xR^{-2} \frac{d(R_0 + z)}{dt} = R^{-1} \frac{dx}{dt} - xR^{-2} \frac{dz}{dt}$$

$$\rightarrow \dots \text{ομοίως: } \frac{d(y/R)}{dt} = R^{-1} \frac{dy}{dt} - yR^{-2} \frac{dz}{dt}$$

Έτσι η αρχική διανυσματική σχέση (1) γίνεται:

$$E_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 x'}{dt^2} \quad \& \quad E_y = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 y'}{dt^2} \quad (2)$$

$x', y'$ : οι “καθυστερημένες” συντεταγμένες του φορτίου (λόγω πεπερασμένης ταχύτητας του φωτός). Οι συντεταγμένες της φαινόμενης θέσης  $A$ .

$t$ : χρόνος παρατήρησης στο  $P$ .

$\tau$ : ο χρόνος που αντιστοιχεί στη θέση  $A$  (φαινόμενη θέση).

Με άλλα λόγια το φορτίο τη στιγμή  $\tau$  βρίσκεται στο  $T(x,y,z)$  ενώ ο παρατηρητής (στο  $P$ ) το βλέπει στη θέση  $A(x',y',z')$  τη στιγμή  $t$ .

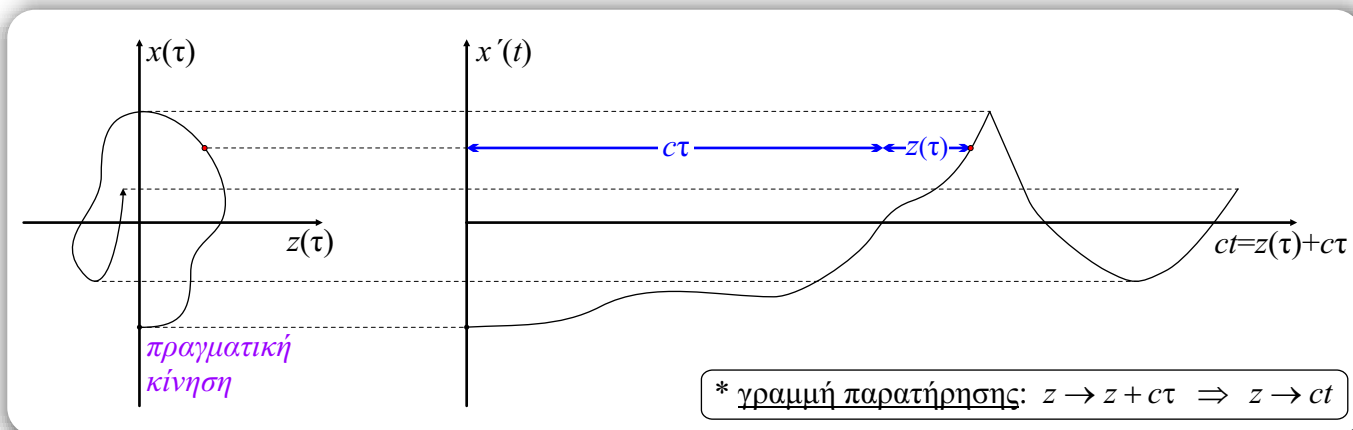
$$t = \tau + \frac{R_0}{c} + \frac{z(\tau)}{c} \quad \& \quad x'(t) = x(\tau) \quad \& \quad y'(t) = y(\tau)$$



Οι προηγούμενες σχέσεις, αγνοώντας τον όρο  $R_0/c$  (που μας αλλάζει απλώς την αρχή των χρόνων κατά μια σταθερά) μας δίνουν:

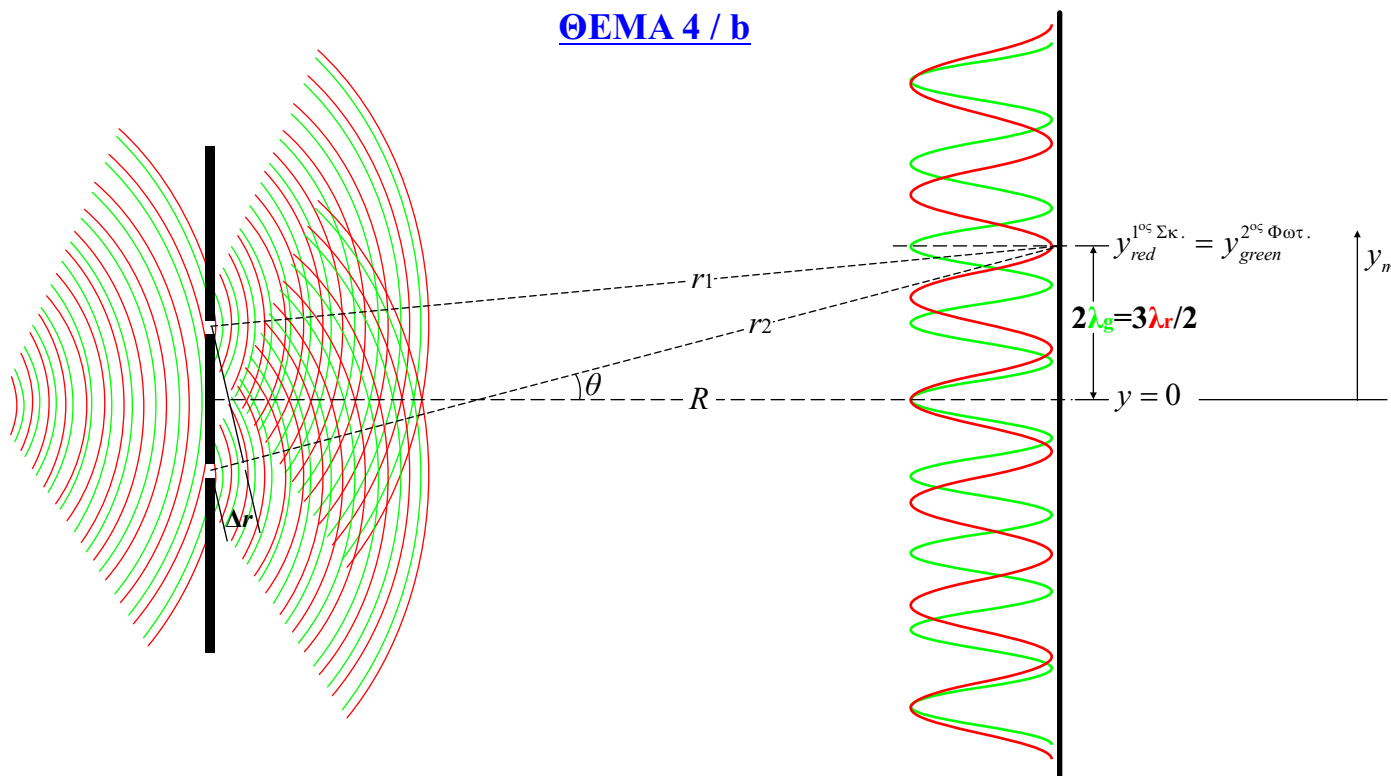
$$t = \tau + \frac{z(\tau)}{c} \Rightarrow \boxed{ct = c\tau + z(\tau)} \quad \& \quad \boxed{x' = x(\tau)} \quad \& \quad \boxed{y' = y(\tau)}$$

Για να βρούμε τα  $x'$  και  $y'$  συναρτήσεις του  $t$  κάνουμε το εξής: παίρνουμε την πραγματική κίνηση του φορτίου και φανταζόμαστε ότι καθώς αυτό κινείται, παρασείρεται από το σημείο P με ταχύτητα  $c$  (πραγματική κίνηση  $z(\tau)$  συν ο παράζοντας  $c\tau$ ). Έτσι η νέα κίνηση, όπου η γραμμή παρατήρησης\* είναι  $ct$  φαίνεται στο δεξιό σήμα:



Τέλος για να βρούμε το παραγόμενο πεδίο σύμφωνα με τις εξισώσεις (2), αρκεί να πάρουμε την 2η παράγωγο της προηγούμενης γραφικής παράστασης  $x' - ct$ .

**ΘΕΜΑ 4 / b**



» Στο πείραμα της διπλής σχισμής του Young έχουμε:

- Διαφορά δρόμων: .....  $\Delta r = d \sin \theta$  (1)
- Ενίσχυση (φωτεινός κροσσός): .....  $\Delta r = m\lambda$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) (2)
- Απόσβεση (σκοτεινός κροσσός): .....  $\Delta r = (m + \frac{1}{2})\lambda$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) (3)



» Από το σχήμα και για  $R \rightarrow \infty$  :

$$\tan \theta = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R \tan \theta \xrightarrow{\frac{y \ll R}{\tan \theta \approx \sin \theta}} y = R \sin \theta \xrightarrow{(1)} y = R \frac{\Delta r}{d} \Rightarrow \begin{cases} (2) & y_{\text{Φωτεινών}} = R \frac{m\lambda}{d} \\ (3) & y_{\text{Σκοτεινών}} = R \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{d} \end{cases}$$

» **ΚΟΚΚΙΝΟ**: σκοτεινός κροσσός 1ης τάξης:  $y_r = R \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda_r}{d} \xrightarrow{m=1} y_r = R \frac{(1 + \frac{1}{2})\lambda_r}{d} \Rightarrow y_r = \frac{3}{2} \frac{R\lambda_r}{d}$

» **ΠΡΑΣΙΝΟ**: φωτεινός κροσσός 2ης τάξης:  $y_g = R \frac{m\lambda_g}{d} \xrightarrow{m=2} y_g = 2 \frac{R\lambda_g}{d}$

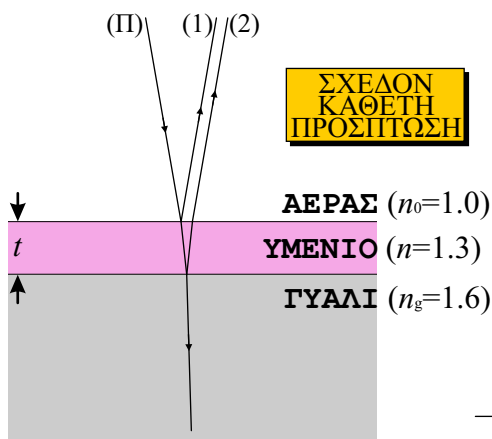
» Αφού οι δύο κροσσοί συμπίπτουν έχουμε:

$$y_r = y_g \Rightarrow \frac{3}{2} \frac{R\lambda_r}{d} = 2 \frac{R\lambda_g}{d} \Rightarrow \frac{3}{2} \lambda_r = 2\lambda_g \Rightarrow \lambda_g = \frac{3}{4} \lambda_r = \frac{3}{4} 680 \text{ nm} \Rightarrow \lambda_g = 510 \text{ nm}$$

βλέπε σχήμα



όρια πράσινου χρώματος: 480-560 nm



### ΘΕΜΑ 4 / c

- ❖ Μετάβαση από τον αέρα στο υμένιο ( $n_0 < n$ )  $\Rightarrow$  Αραιό  $\rightarrow$  Πυκνό  
- αυτό σημαίνει ότι η ανακλώμενη ακτίνα (1) παρουσιάζει διαφορά φάσης εξ ανακλάσεως  $180^\circ$  σε σχέση με την προσπίπτουσα ακτίνα (II) [ $\Delta\phi_{\text{αερ} \rightarrow \text{υμε}} = 180^\circ$ ]
- ❖ Μετάβαση από το υμένιο στο γυαλί ( $n < n_g$ )  $\Rightarrow$  Αραιό  $\rightarrow$  Πυκνό  
- αυτό επίσης σημαίνει ότι η ανακλώμενη (2) παρουσιάζει διαφορά φάσης εξ ανακλάσεως  $180^\circ$  σε σχέση με την προσπίπτουσα (II) [ $\Delta\phi_{\text{υμε} \rightarrow \text{γυα}} = 180^\circ$ ]

-Επομένως:  $\left. \begin{matrix} \Delta\phi_{\text{αερ} \rightarrow \text{υμε}} = 180^\circ \\ \Delta\phi_{\text{υμε} \rightarrow \text{γυα}} = 180^\circ \end{matrix} \right\} \Rightarrow \Delta\phi_{(1)-(2)} = 0^\circ$

Οι δύο ανακλώμενες (από τις δύο πλευρές του υμενίου) ακτίνες (1) & (2) δεν παρουσιάζουν διαφορά φάσης εξ ανακλάσεως.

➡ Απομένει μόνο η διαφορά δρόμων για να έχουμε περίπτωση ανααιρετικής συμβολής των (1) & (2) ώστε να έχουμε ελαχιστοποίηση του ανακλώμενου φωτός από τις δύο επιφάνειες.

➡ Επειδή η πρόσπτωση γίνεται σχεδόν κάθετα (ή στην περίπτωση της εκφώνησης της άσκησης ακριβώς κάθετα), η διαφορά δρόμων μέσα στο υμένιο είναι  $\Delta r = 2t$ . Αν η διαφορά δρόμων είναι ίση με το μισό μήκος κύματος του φωτός μέσα στο υμένιο, τότε η συμβολή θα είναι ανααιρετική.

➡ Μέσα στο υμένιο:  $\lambda_{\text{υμε.}} = \frac{\lambda_0}{n_{\text{υμε.}}} = \frac{640}{1.3} = 492.3 \text{ nm}$

➡ Επομένως:  $\Delta r = \frac{\lambda_{\text{υμε.}}}{2} \Rightarrow 2t = \frac{\lambda_{\text{υμε.}}}{2} \Rightarrow t = \frac{\lambda_{\text{υμε.}}}{4} \Rightarrow t = \frac{492.3}{4} \Rightarrow t = 123.075 \text{ nm}$



► Σύμφωνα με την Η/Μ θεωρία του *Maxwell*, αν το ανακλώμενο κύμα έχει πλάτος  $E_r$  και το προσπίπτων  $E_i$ , η σχέση που συνδέει τα δύο πλάτη είναι:

$$E_r = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b} E_i$$

Όταν η πρόσπτωση γίνεται από το μέσο  $a$  στο μέσο  $b$ .

► Στην άσκησή μας:

$$* \text{Αέρας} \rightarrow \text{Υμένιο: } E_{(1)} = \frac{n_0 - n}{n_0 + n} E_{(\Pi)} = \frac{1.0 - 1.3}{1.0 + 1.3} E_{(\Pi)} = -0.1304 E_{(\Pi)}$$

$$* \text{Υμένιο} \rightarrow \text{Γυαλί: } E_{(2)} = \frac{n - n_g}{n + n_g} E_{(\Pi)} = \frac{1.3 - 1.6}{1.3 + 1.6} E_{(\Pi)} = -0.1034 E_{(\Pi)}$$

Τα αρνητικά πρόσημα δηλώνουν τη διαφορά φάσης  $180^\circ$  εξ ανακλάσεως που αναφέραμε στο πρώτο μέρος

Επειδή η φωτεινή ισχύς ορίζεται ως  $P = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A}$  όπου  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$  το διάνυσμα *Poynting* και  $\vec{A}$  η επιφάνεια στην οποία προσπίπτει το Η/Μ κύμα και επειδή η μέση τιμή του διαν. *Poynting* είναι  $S_{av.} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\max}^2$  βλέπουμε ότι η φωτεινή ισχύς είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος. Άρα οι εντάσεις  $P_{(1)}$  και  $P_{(2)}$  των δύο ανακλώμενων ακτίνων όντας ανάλογες προς τα τετράγωνα των  $E_{(1)}$  και  $E_{(2)}$  θα σχετίζονται με την προσπίπτουσα ένταση  $P_{(\Pi)}$  με τις σχέσεις:

$$\gg E_{(1)} = -0.1304 E_{(\Pi)} \xrightarrow{P \sim E^2} P_{(1)} = 0.1304^2 P_{(\Pi)} = 0.017 P_{(\Pi)} \Rightarrow \boxed{P_{(1)} = 1.70\% P_{(\Pi)}}$$

$$\gg E_{(2)} = -0.1034 E_{(\Pi)} \xrightarrow{P \sim E^2} P_{(2)} = 0.1034^2 P_{(\Pi)} = 0.0107 P_{(\Pi)} \Rightarrow \boxed{P_{(2)} = 1.07\% P_{(\Pi)}}$$

**ΤΕΛΟΣ**