

# Απλή Αρμονική Ταλάντωση Ράβδου σε Περιστρεφόμενους Δίσκους

Νέζης Αναστάσιος, ΠΕ04.01, [nezistasos@gmail.com](mailto:nezistasos@gmail.com)

Κοριαζόπουλος Νικόλαος, ΠΕ04.01, [nikkyriazo@gmail.com](mailto:nikkyriazo@gmail.com)

Λάζος Παναγιώτης, ΠΕ04.01, [taklazos@gmail.com](mailto:taklazos@gmail.com)

## Περίληψη

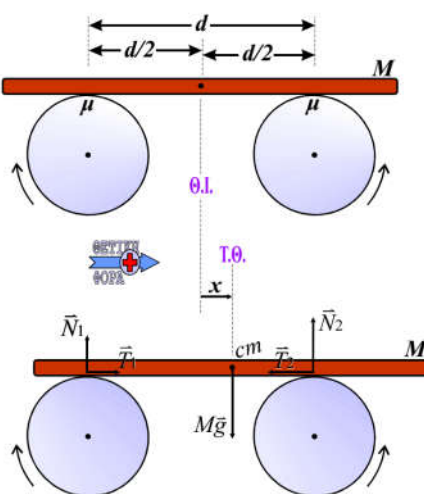
Με τη διάταξη αυτή θα μελετήσουμε την έννοια της απλής αρμονικής ταλάντωσης ενός στερεού σώματος. Πρόκειται για δύο αντίθετα περιστρεφόμενους, κατακόρυφους δίσκους πάνω στους οποίους ταλαντώνεται μια ράβδος. Η διάταξη παρουσιάζεται σε δύο εκδοχές, μια απλή – χειροκίνητη και μια με ηλεκτρικό μοτέρ. Στη δεύτερη περίπτωση μας επιτρέπεται να κάνουμε μετρήσεις με τη χρήση αισθητήρα και Arduino και να επιβεβαιώσουμε τις προβλέψεις μας.

## Abstract

With this device, we will study the concept of simple harmonic oscillation of a solid body. It consists of two, rotating, vertical discs on which a rod oscillates. The device is presented in two versions, one simple – manual and one with an electric motor. In the second case, we are allowed to make measurements using a sensor and Arduino and confirm our predictions.

## Εισαγωγή / Θεωρητική θεμελίωση

Σύμφωνα με το πρόβλημα 4.70 του σχολικού βιβλίου της Φυσικής Γ' Λυκείου (θετικού προσανατολισμού) των ΓΕΛ [1], έχουμε δύο κατακόρυφους δίσκους που περιστρέφονται αντίστροφα με σταθερές γωνιακές ταχύτητες. Πάνω τους βρίσκεται (οριζόντια) μια ομογενής και ισοπαχής ράβδος, η οποία παρουσιάζει τριβή ολίσθησης με τους δίσκους (με συντελεστή  $\mu$ ). Αν η μάζα της ράβδου είναι  $M$  και η απόσταση των κέντρων των δίσκων είναι  $d$ , τότε έχουμε:



**Εικόνα 1:** Η ράβδος πάνω στους περιστρεφόμενους δίσκους (στη θέση ισορροπίας και σε τυχαία θέση)

- Η ράβδος ισορροπεί κατακόρυφα:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = Mg \quad (1)$$

- Η ράβδος δεν περιστρέφεται ως προς το κέντρο μάζας της:

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{\tau}_{(cm)} = 0 &\Rightarrow \bar{\tau}_{T1} + \bar{\tau}_{T2} + \bar{\tau}_{N1} + \bar{\tau}_{N2} + \bar{\tau}_{Mg} = 0 \Rightarrow N_1\left(\frac{d}{2} + x\right) - N_2\left(\frac{d}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_1 \frac{d}{2} + N_1 x - N_2 \frac{d}{2} + N_2 x = 0 \Rightarrow (N_1 - N_2) \frac{d}{2} = -(N_1 + N_2)x \Rightarrow N_1 - N_2 = -(N_1 + N_2) \frac{2x}{d} \quad (2) \end{aligned}$$

- Στον οριζόντιο άξονα έχουμε:

$$\Sigma F_x = T_1 - T_2 = \mu N_1 - \mu N_2 = \mu(N_1 - N_2) \xrightarrow{(2)} -\mu(N_1 + N_2) \frac{2x}{d} \xrightarrow{(1)} -\mu Mg \frac{2x}{d} \Rightarrow \Sigma F_x = -\frac{2\mu Mg}{d} x$$

άρα, η ράβδος εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση ( $\Sigma F = -Dx$ ) με σταθερά επαναφοράς:

$$D = \frac{2\mu Mg}{d}$$

και περίοδο:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{\frac{2\mu Mg}{d}}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{d}{2\mu g}}$$

## Περιγραφή Εργασίας

Με τις διατάξεις που θα παρουσιαστούν παρακάτω θα επιχειρήσουμε να κάνουμε πιο κατανοητό το φαινόμενο που περιγράφει το σχολικό βιβλίο. Άλλωστε, γνωρίζουμε πως η πραγματικότητα σε σχέση με το σχήμα ή την ιδέα απέχει κατά πολύ στο μυαλό των μαθητών μας (και όχι μόνο). Οι συσκευές μας αποτελούνται από απλά υλικά και είναι ιδιαίτερα εύκολες και φθηνές στην κατασκευή. Με λίγο περισσότερο κόπο μπορούν να γίνουν και αισθητικά ελκυστικές στα μάτια των παιδιών.

### A. Η χειροκίνητη συσκευή

Η συσκευή αυτή είναι κατασκευασμένη με τέσσερα CDs, τα οποία ανά δύο αποτελούν έναν δίσκο. Ανάμεσα σε κάθε ζεύγος έχουμε κολλήσει έναν (ελαφριά μικρότερης διαμέτρου) δίσκο από μακετόχαρτο (πάχους 5 mm) φτιάχνοντας κάτι σαν σάντουιτς.



**Εικόνα 2:** Η χειροκίνητη συσκευή ταλάντωσης ράβδου πάνω σε περιστρεφόμενους δίσκους

Με ροδέλες και βίδες έχουμε στερεώσει τους δίσκους σε μια ξύλινη βάση, όπως βλέπουμε στην Εικόνα 2, έτσι ώστε να μπορούν να περιστρέφονται ελεύθερα. Η περιστροφή του ενός δίσκου γίνεται με το χέρι μας χρησιμοποιώντας έναν μικρό μοχλό (κυλινδρικό κομμάτι ξύλου) τοποθετημένο κάθετα στον δίσκο σε κατάλληλη τρύπα. Για να επιτύχουμε την ίδια γωνιακή ταχύτητα και αντίθετη περιστροφή στον δεύτερο δίσκο κάνουμε το εξής: τοποθετούμε έναν μεγάλο κλειστό ιμάντα (λάστιχο), έτσι ώστε να εφάπτεται στο μακετόχαρτο, να ενώνει τους δύο δίσκους και επιπλέον να έχει σχήμα «απείρου» ( $\infty$ ). Επειδή είναι δύσκολο να βρεθεί τέτοιο λάστιχο στο εμπόριο, το κατασκευάζουμε απλά παίρνοντας λάστιχο “με το μέτρο”, κόβοντας το κατάλληλο τμήμα (έτσι ώστε να είναι τεντωμένο) και ράβοντας τα άκρα μεταξύ τους. Τέλος, η ράβδος μπορεί να είναι απλά ένα καλαμάκι από σουβλάκι ή στην περίπτωσή μας ένα καλαμάκι με το οποίο τα ανθοπωλεία στερεώνουν τα φυτά (είναι μεγαλύτερο και παχύτερο).

Περαιτέρω, περιστρέφοντας τον έναν δίσκο με το χέρι μας, έτσι ώστε οι δίσκοι να περιστρέφονται ο ένας προς τον άλλο<sup>1</sup>, βλέπουμε πράγματι ότι η ράβδος εκτελεί μια παλινδρομική κίνηση που μοιάζει αρκετά με αρμονική [2]. Φυσικά η συγκεκριμένη συσκευή έχει αρκετά κατασκευαστικά προβλήματα, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μετρήσεις. Είναι, όμως, ιδανική για την απλή επίδειξη του φαινομένου που περιγράφει το σχολικό βιβλίο. Αναλυτικές οδηγίες για την κατασκευή μπορείτε να βρείτε στο βίντεο του Arvind Gupta στην αναφορά [3].

## **B. Η ηλεκτρική συσκευή**

Στην προσπάθειά μας να κάνουμε το φαινόμενο που περιγράψαμε μετρήσιμο, κατασκευάσαμε και μια καλύτερη εκδοχή της συσκευής. Πρόκειται για μια πιο στιβαρή κατασκευή, με καλύτερα υλικά.



**Εικόνα 3:** Η ηλεκτρική συσκευή ταλάντωσης ράβδου πάνω σε περιστρεφόμενους δίσκους

Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3, οι δίσκοι είναι τώρα δύο τροχαλίες με βάση (με κόστος περίπου 8 € η μια) τοποθετημένες σταθερά πάνω σε ένα επίπεδο κομμάτι ξύλου. Η κίνηση παρέχεται από ένα ηλεκτρικό εργαλείο λείανσης (τύπου Dremel, κόστους περίπου 25 €) τοποθετημένο, επίσης, σταθερά στο κομμάτι ξύλου. Η “μύτη” του εργαλείου εφάπτεται με μια από τις τροχαλίες. Για να έχουμε την καλύτερη δυνατή επαφή, έχουμε τοποθετήσει στο εργαλείο το εξάρτημα που δέχεται τους κυλίνδρους από γυαλόχαρτο, χωρίς το γυαλόχαρτο. Το συγκεκριμένο εξάρτημα είναι ένας άξονας που στο άκρο του έχει έναν λαστιχένιο κύλινδρο. Το λάστιχο του κυλίνδρου μας παρέχει την κατάλληλη επαφή, χωρίς ολίσθηση, με την τροχαλία.

<sup>1</sup> δηλαδή οι γωνιακές τους ταχύτητες να είναι: του αριστερού προς τα μέσα ( $\times$ ) και του δεξιού προς τα έξω ( $\cdot$ ).

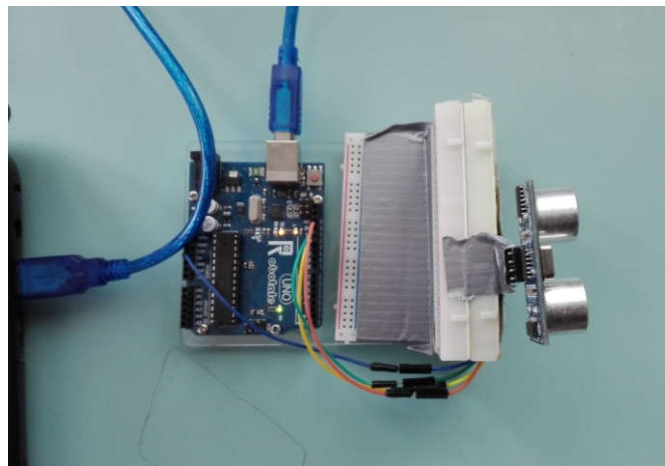
Όπως και στην χειροκίνητη συσκευή, η μετάδοση της κίνησης με αντίθετη γωνιακή ταχύτητα γίνεται με ένα λάστιχο σε σχήμα “απείρου” ( $\infty$ ). Εδώ ήμασταν ιδιαίτερα προσεκτικοί, γιατί το λάστιχο έπρεπε να ήταν αρκετά τεντωμένο. Η ισχύς του ηλεκτρικού εργαλείου μας επέτρεψε να έχουμε καλά τεντωμένο λάστιχο και να μην έχουμε απώλεια γωνιακής ταχύτητας από την μια στην άλλη τροχαλία. Τέλος, ως ράβδος χρησιμοποιήθηκε ένας ανοξείδωτος άξονας (μήκους 40 cm και διαμέτρου 1 cm περίπου) από παλιό εκτυπωτή. Εναλλακτικά θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν οι ράβδοι που υπάρχουν στα σχολικά εργαστήρια (μήκους 30 ή 80 cm και διαμέτρου 1 cm). Το αποτέλεσμα, όπως φαίνεται στο βίντεο [4], είναι μια πολύ ωραία αρμονική κίνηση και φυσικά η συνέχεια θα ήταν να μετρηθεί.

Για να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά στοιχεία της κίνησης που εκτελεί η ταλαντούμενη ράβδος, χρησιμοποιούμε τη μητρική πλακέτας Arduino Uno [5] και ένα αισθητήρα υπερήχων – απόστασης HC-SR04 [6]. Ο ψηφιακός αυτός αισθητήρας υπερήχων (ultrasonic distance sensor, Εικόνα 4) έχει τη δυνατότητα να λειτουργεί ως πομπός και ως δέκτης. Έτσι μπορεί να στέλνει ένα υπερηχητικό σήμα και να το λαμβάνει πίσω μετά από ανάκλαση σε κάποιο εμπόδιο. Η χαρακτηριστική αυτή λειτουργία του τον καθιστά ιδανικό για μια σειρά εφαρμογών, όπως είναι ο υπολογισμός της απόστασης ανάμεσα στον αισθητήρα και σε ένα αντικείμενο που βρίσκεται μπροστά του.



**Εικόνα 4:** Αισθητήρας υπερήχων HC-SR04

Τοποθετούμε το σύστημα Arduino – αισθητήρας (Εικόνα 5) απέναντι από τη ράβδο και αφού τη θέσουμε σε ταλάντωση, καταγράφουμε τη μεταβολή της απόστασης του άκρου της από τον αισθητήρα.



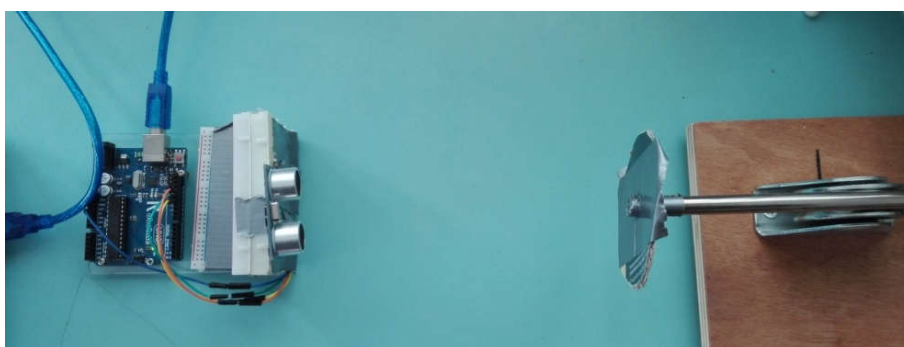
**Εικόνα 5:** Σύνδεση του αισθητήρα HC-SR04 με το Arduino Uno

Πιο συγκεκριμένα, με ένα απλό σχετικά κώδικα προγραμματίσαμε το Arduino Uno, έτσι ώστε ο συνδεδεμένος πάνω του αισθητήρας HC-SR04 να στέλνει ένα υπερηχητικό παλμό συχνότητας 20 Hz. Ο παλμός αυτός, αφού ανακλαστεί σε κάποιο εμπόδιο ανιχνεύεται από το δέκτη του αισθητήρα. Γνωρίζοντας την ταχύτητα με την οποία τα υπερηχητικά κύματα σε θερμοκρασία δωματίου ( $v_{\eta\chi} = 343 \text{ m/s}$ ) και

μετρώντας το χρονικό διάστημα  $\Delta t$  ανάμεσα στη στιγμή που έφυγε ο παλμός και τη στιγμή που ανιχνεύτηκε μετά την ανάκλαση, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση  $d$  του αισθητήρα από το εμπόδιο σύμφωνα με τη σχέση:

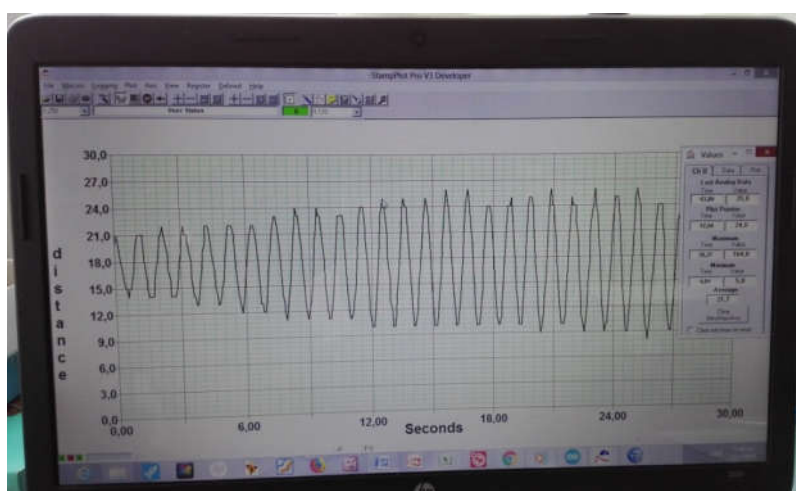
$$d = v_{\eta\zeta} \frac{\Delta t}{2}$$

Καθώς η επιφάνεια της ράβδου είναι ιδιαίτερη μικρή, για να έχουμε τις επιθυμητές ανακλάσεις, προσθέσαμε στο ένα άκρο της ένα εμπόδιο από χαρτόνι κυκλικού σχήματος (Εικόνα 6).



**Εικόνα 6:** Ταλαντούμενη ράβδος και αισθητήρας απόστασης

Με τη βοήθεια ειδικού λογισμικού τύπου “*plotting data*” [7] μπορούμε να βλέπουμε σε πραγματικό χρόνο την μεταβολή της απόστασης  $d$  με το χρόνο (Εικόνα 7 και βίντεο [8]). Και όπως φαίνεται από την εικόνα, η γραφική παράσταση προσεγγίζει ικανοποιητικά την ημιτονοειδή μορφή, άρα η κίνηση μπορεί να χαρακτηριστεί περιοδική και μάλιστα κατά προσέγγιση αρμονική ταλάντωση.

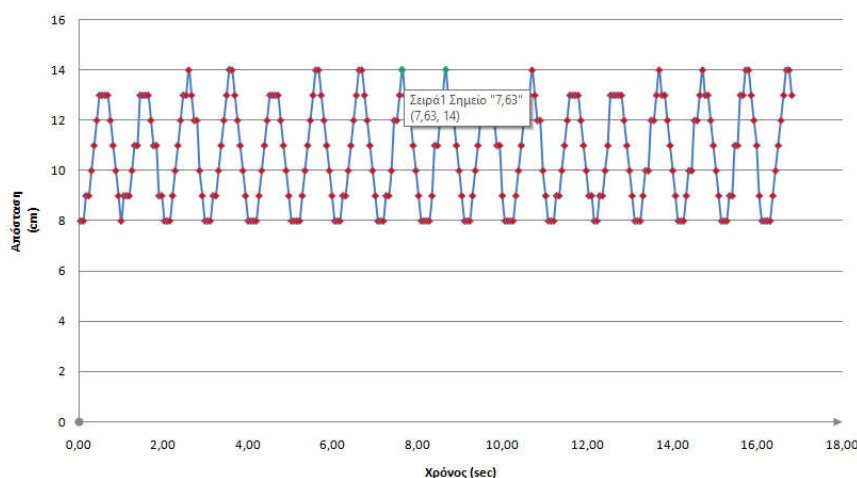


**Εικόνα 7:** Απεικόνιση (σε πραγματικό χρόνο) της μεταβολής της απόστασης σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Επιπλέον με τη χρήση του ειδικού λογισμικού *PLX-DAQ* [9] είχαμε τη δυνατότητα να συλλέξουμε συνολικά 264 μετρήσεις σε ένα χρονικό διάστημα περίπου 17 sec και να τις εξάγουμε στο πρόγραμμα Microsoft Excel. Με αυτό κάναμε την γραφική παράσταση απόστασης – χρόνου (Εικόνα 8), όπου κι εδώ φαίνεται ότι η κίνηση προσεγγίζει ικανοποιητικά την απλή αρμονική ταλάντωση. Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση επιχειρήσαμε να κάνουμε και έναν προσεγγιστικό υπολογισμό της περιόδου κίνησης. Ειδικότερα, καταγράψαμε τις χρονικές στιγμές ανάμεσα σε

δύο διαδοχικά μέγιστα προς την ίδια κατεύθυνση (πράσινο χρώμα) και από τη μεταξύ τους διαφορά βρίσκουμε ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι περίπου:

$$\Delta t = T = 8,65 - 7,63 = 1,02 \text{ sec}$$



**Εικόνα 8:** Απεικόνιση της μεταβολής της απόστασης σε συνάρτηση με τον χρόνο, σύμφωνα με τις τιμές που συλλέξαμε από το πείραμα.

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να μελετήσουμε την κίνηση της ράβδου είναι να την βιντεοσκοπήσουμε και στη συνέχεια να εισάγουμε το βίντεο στο δωρεάν λογισμικό *Tracker* [10]. Το *Tracker* είναι ένα ευρέως διαδεδομένο λογισμικό ανάλυσης βίντεο, με το οποίο μπορούμε (ανάμεσα σε άλλα) να δημιουργήσουμε την γραφική παράσταση θέσης – χρόνου για ένα κινητό και να ελέγξουμε αν η κίνηση είναι απλή αρμονική ταλάντωση. Αν και δεν είχαμε τον χρόνο να υλοποιήσουμε τη συγκεκριμένη ιδέα για την διάταξή μας, είμαστε σίγουροι πώς είναι υλοποιήσιμη σύμφωνα με την εμπειρία μας από άλλα παρόμοια φαινόμενα. Την προτείνουμε, δε, ειδικά για όσους συναδέλφους είναι εξοικειωμένοι με το *Tracker* αλλά όχι με το *Arduino*.

Τέλος, θα θέλαμε να δείξουμε και μια άλλη πτυχή του φαινομένου: αν οι δίσκοι περιστρέφονται αντίστροφα απ' ό τι στο πείραμά μας, αν δηλαδή ο δεξιός δίσκος έχει γωνιακή ταχύτητα προς τα μέσα ( $\times$ ) και ο αριστερός προς τα έξω ( $\cdot$ ), τότε η ράβδος δεν μπορεί να κάνει ταλάντωση. Απλά φεύγει από τη θέση της και πέφτει κάτω [11]. Αυτό μπορεί, εύκολα, να δειχθεί με την πρώτη συσκευή (την χειροκίνητη). Με τη σειρά του θα μας δώσει το έναυσμα για να λυθεί θεωρητικά το πρόβλημα: να αποδειχθεί, δηλαδή, πως σύμφωνα με τις γνωστές διαδικασίες που περιγράφηκαν στην εισαγωγή, η ράβδος δεν ικανοποιεί τις συνθήκες για απλή αρμονική ταλάντωση.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πηττάς Α., Ράπτης Σ.: *‘Φυσική, Γ’ Γενικού Λυκείου, Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών’* (ΙΤΥΕ Διόφαντος, 1999)
- [2] Αναστάσιος Νέζης, <https://www.instagram.com/p/BmLimSOlpGP/>  
(ημερομηνία προσπέλασης: 11/01/2019)
- [3] Arvind Gupta, <https://www.youtube.com/watch?v=d8YtCZ-WpQM>  
(ημερομηνία προσπέλασης: 11/01/2019)
- [4] Αναστάσιος Νέζης, <https://www.instagram.com/p/BmTGB39Hu6u/>  
(ημερομηνία προσπέλασης: 11/01/2019)
- [5] Arduino Store, <https://store.arduino.cc/arduino-uno-rev3>  
(ημερομηνία προσπέλασης: 11/01/2019)
- [6] Random Nerd Tutorials, <https://randomnerdtutorials.com/complete-guide-for-ultrasonic-sensor-hc-sr04/>  
(ημερομηνία προσπέλασης: 11/01/2019)
- [7] Informer Technologies Inc, <https://stampplot-pro.software.informer.com/3.9/>  
(ημερομηνία προσπέλασης: 11/01/2019)
- [8] Νίκος Κυριαζόπουλος, <https://www.instagram.com/p/BskufnVheWt/>  
(ημερομηνία προσπέλασης: 13/01/2019)
- [9] Parallax Inc, <https://www.parallax.com/downloads/plx-daq>  
(ημερομηνία προσπέλασης: 13/01/2019)
- [10] Douglas Brown, <https://physlets.org/tracker/>  
(ημερομηνία προσπέλασης: 11/01/2019)
- [11] Dan Russell, <https://goo.gl/N1MoTJ>  
(ημερομηνία προσπέλασης: 11/01/2019)