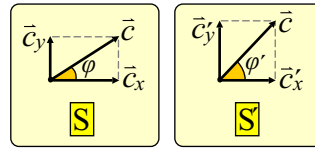
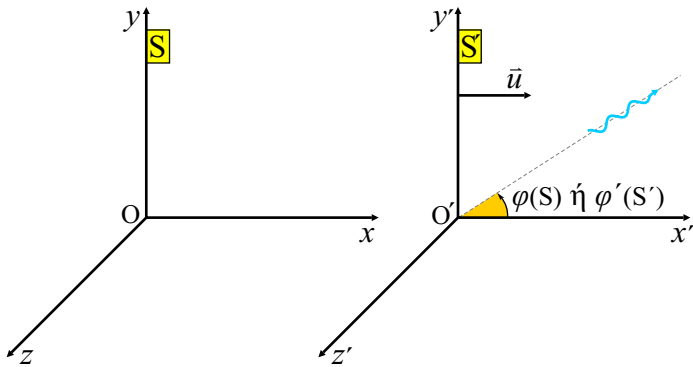




ΘΕΜΑ 1 / α. / (i)



$$\cos\varphi = \frac{c_x}{c} \quad (1)$$

$$\cos\varphi' = \frac{c'_x}{c} \quad (2)$$

c : ταχύτητα φωτός, κοινή σε όλα τα συστήματα αναφοράς.

Η εξίσωση (2) μαζί με τον μετ/μο Lorentz ταχυτήτων για “αντικείμενο” το οποίο απομακρύνεται με c_x στο S και c'_x στο S' μας δίνει:

$$\cos\varphi' = \frac{c'_x}{c} = \frac{\frac{c_x - u}{1 - c_x u / c^2}}{c} = \frac{c_x - u}{c(1 - c_x u / c^2)} = \frac{c_x - u}{c - \frac{c_x u}{c}} \xrightarrow{(1): c_x = c \cdot \cos\varphi} \frac{c \cdot \cos\varphi - u}{c - \frac{c \cdot \cos\varphi \cdot u}{c}} = \frac{c \cdot \cos\varphi - u}{c - u \cdot \cos\varphi}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi'(c - u \cdot \cos\varphi) = c \cdot \cos\varphi - u \Rightarrow c \cdot \cos\varphi' - u \cdot \cos\varphi \cdot \cos\varphi' = c \cdot \cos\varphi - u \Rightarrow$$

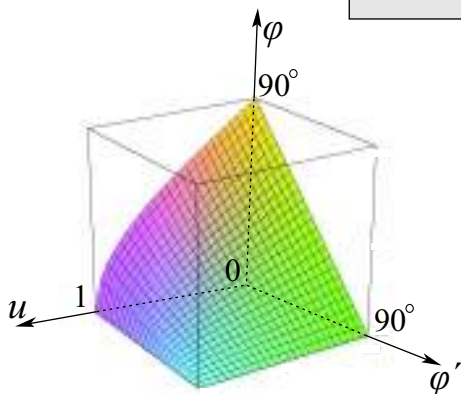
$$\Rightarrow c \cdot \cos\varphi' + u = c \cdot \cos\varphi + u \cdot \cos\varphi \cdot \cos\varphi' \Rightarrow c \cdot \cos\varphi' + u = \cos\varphi(c + u \cdot \cos\varphi') \Rightarrow \cos\varphi = \frac{c \cdot \cos\varphi' + u}{c + u \cdot \cos\varphi'}$$

$$\xrightarrow{\frac{\div c}{\div c}} \cos\varphi = \frac{\cos\varphi' + \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c} \cos\varphi'} \xrightarrow{c=1} \cos\varphi = \frac{\cos\varphi' + u}{1 + u \cdot \cos\varphi'}$$

ΘΕΜΑ 1 / α. / (ii) το φαινόμενο του προβολέα

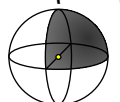
Ο τύπος $\cos\varphi = \frac{\cos\varphi' + u}{1 + u \cdot \cos\varphi'}$ στις “μονάδες $c=1$ ” έχει όρια για το u : $0 \leq u < 1$ ή σε πραγματικές μονάδες: $0 \leq u < c$

Λύνοντας ως προς φ έχουμε: $\varphi = \cos^{-1} \frac{\cos\varphi' + u}{1 + u \cdot \cos\varphi'}$



και αυτή είναι η γωνία στην οποία βλέπει ο εξωτερικός παρατηρητής να εκπέμπεται το φως, αν φ' η γωνία την οποία βλέπει ο παρατηρητής μέσα στο διαστημόπλοιο και u η ταχύτητα του διαστημοπλοίου (σε σχέση με τον εξωτερικό παρατηρητή).

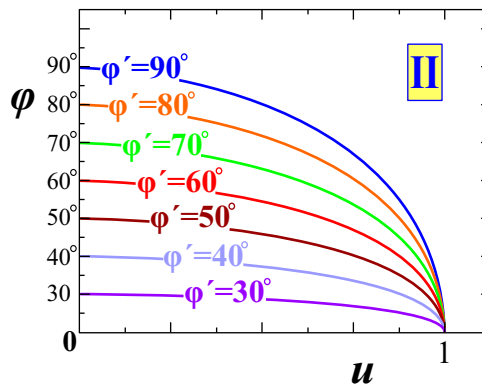
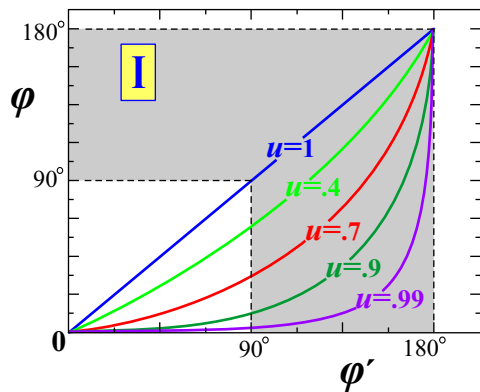
Ασχολούμενοι μόνο με γωνίες $0^\circ \leq \varphi' \leq 90^\circ$ δηλαδή μόνο με το εμπρός 1/4 της σφαίρας φωτός και κάνοντας δύο γραφικές παραστάσεις



[I]: $\varphi=f(\varphi')$ (για διάφορες τιμές του u)

[II]: $\varphi=f(u)$ (για διάφορες τιμές του φ')

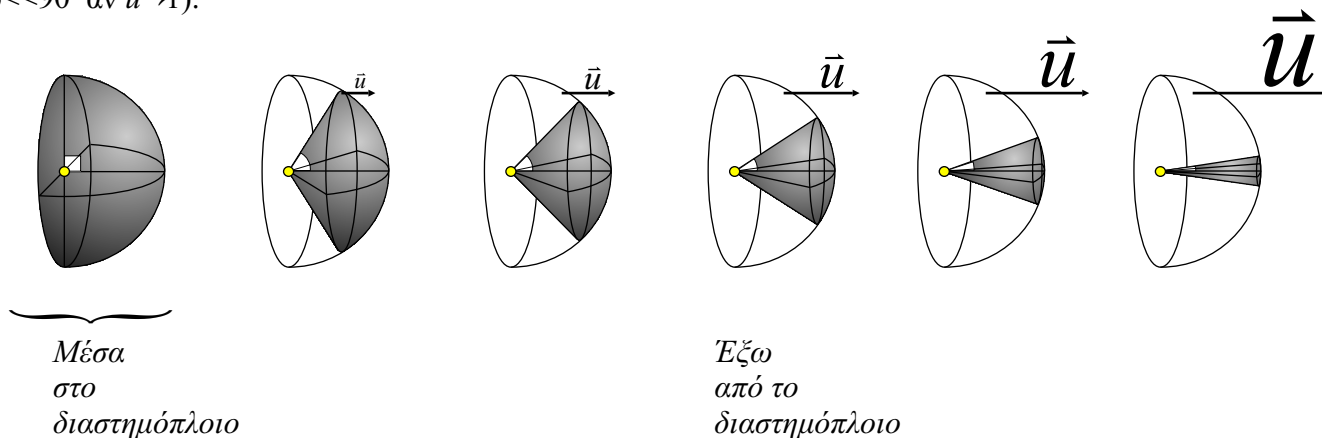
έχουμε:



» Από το διάγραμμα I παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η ϕ' από $0^\circ \rightarrow 90^\circ$ τόσο αυξάνεται η ϕ από $0^\circ \rightarrow$ σε μια γωνία μικρότερη από την αντίστοιχη της ϕ' . Μάλιστα όσο μεγαλύτερη είναι η u τόσο μικρότερη είναι αυτή η καταληκτική γωνία ϕ . Το ίδιο προκύπτει και από το μαθηματικό όριο:

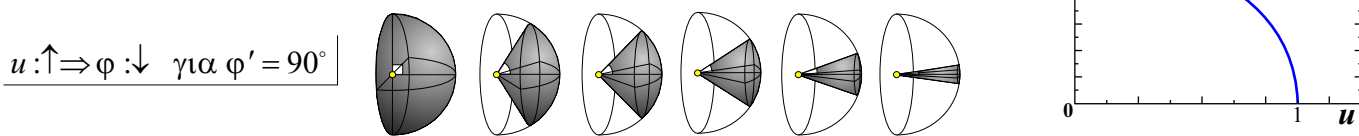
$$\lim_{u \rightarrow 1} \phi = \lim_{u \rightarrow 1} \cos^{-1} \frac{\cos \phi' + u}{1 + u \cdot \cos \phi'} = \cos^{-1} \frac{\cos \phi' + 1}{1 + 1 \cdot \cos \phi'} = \cos^{-1} 1 = 0^\circ$$

» Με άλλα λόγια ενώ ο κινούμενος παρατηρητής (μέσα στο διαστημόπλοιο) βλέπει ένα ημισφαίριο φωτός μπροστά από την σημακή πηγή, ο ακίνητος απ' έξω βλέπει έναν κώνο (οι 90° του ϕ' γίνονται $\phi < 90^\circ$ ή $\phi \ll 90^\circ$ αν $u \rightarrow 1$).



Να σημειώσουμε βέβαια ότι η "ποσότητα" του φωτός που βλέπει ο "απ' έξω" δεν αλλάζει (δηλαδή βλέπει τον ίδιο "αριθμό" ακτινών με όσες πραγματικά εκπέμπονται). Αυτό που βλέπει είναι αυτές τις ίδιες ακτίνες συγκεντρωμένες σε έναν κώνο (και άρα πιο έντονο φως) και όχι απλωμένες σε ένα ημισφαίριο.

» Το διάγραμμα II μας δείχνει κάτι αντίστοιχο. Με δεδομένη μια ακτίνα του ημισφαιρίου, η οποία εκπέμπεται υπό γωνία ϕ' και όσο η u αυξάνεται, ο εξωτερικός παρατηρητής την βλέπει με γωνία ϕ , η οποία όλο και μειώνεται. Φυσικά ισχύει και για τα όρια του ημισφαιρίου ($\phi' = 90^\circ$), τα οποία με την αύξηση της u "συρρικνώνονται", άρα έχουμε τις προηγούμενες εικόνες των κώνων:



ΘΕΜΑ 1 / b.

➤ Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους: $E = K + mc^2$ & $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ στο σύστημα όπου $c=1$, δηλαδή:

$$E = K + mc^2 \xrightarrow{c=1} \boxed{E = K + m}$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \xrightarrow{c=1} \boxed{E^2 = p^2 + m^2}$$

E : ολική ενέργεια
 K : σχετικιστική κινητική ενέργεια
 m : μάζα ηρεμίας
 p : σχετικιστική ορμή
 $E_0 = mc^2 \xrightarrow{c=1} E_0 = m$: ενέργεια ηρεμίας

»Θ1/b/(i)

$$p_x > 0, p_y = 0, p_z = 0 \quad (*)$$

$$K = 3E_0 = 3mc^2 \xrightarrow{c=1} K = 3m$$

$$\bullet E = K + m = 3m + m \Rightarrow \boxed{E = 4m}$$

$$\bullet E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow (4m)^2 = p_x^2 + m^2 \Rightarrow 16m^2 = p_x^2 + m^2 \Rightarrow p_x^2 = 15m^2 \Rightarrow p_x = \pm\sqrt{15}m \xrightarrow{p_x > 0} \boxed{p_x = \sqrt{15}m}$$

$$\Rightarrow [E, p_x, p_y, p_z] = [4m, \sqrt{15}m, 0, 0]$$

»Θ1/b/(ii)

$$p_x > 0, p_y = 0, p_z = 0 \quad (*)$$

$$K = m$$

$$\bullet E = K + m = m + m \Rightarrow \boxed{E = 2m}$$

$$\bullet E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow (2m)^2 = p_x^2 + m^2 \Rightarrow 4m^2 = p_x^2 + m^2 \Rightarrow p_x^2 = 3m^2 \Rightarrow p_x = \pm\sqrt{3}m \xrightarrow{p_x > 0} \boxed{p_x = \sqrt{3}m}$$

$$\Rightarrow [E, p_x, p_y, p_z] = [2m, \sqrt{3}m, 0, 0]$$

»Θ1/b/(iii)

$$p_x = 0, p_y > 0, p_z = 0$$

$$p = 2m \rightarrow p_y = 2m$$

$$\bullet E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow E^2 = (2m)^2 + m^2 \Rightarrow E^2 = 4m^2 + m^2 \Rightarrow E^2 = 5m^2 \Rightarrow \boxed{E = \sqrt{5}m}$$

$$\Rightarrow [E, p_x, p_y, p_z] = [\sqrt{5}m, 0, 2m, 0]$$

»Θ1/b/(iv)

$$p_x < 0, p_y = 0, p_z = 0 \quad (*)$$

$$E = 4m$$

$$\bullet E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow (4m)^2 = p_x^2 + m^2 \Rightarrow 16m^2 = p_x^2 + m^2 \Rightarrow p_x^2 = 15m^2 \Rightarrow p_x = \pm\sqrt{15}m \xrightarrow{p_x < 0} \boxed{p_x = -\sqrt{15}m}$$

$$\Rightarrow [E, p_x, p_y, p_z] = [4m, -\sqrt{15}m, 0, 0]$$

»Θ1/b/(v)

$$p_x = p_y = p_z \quad (*)$$

$$K = 4E_0 = 4mc^2 \xrightarrow{c=1} K = 4m$$

$$\bullet E = K + m = 4m + m \Rightarrow E = 5m$$

$$\bullet E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow (5m)^2 = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m^2 \xrightarrow{(*)} 25m^2 = 3p_x^2 + m^2 \Rightarrow 3p_x^2 = 24m^2 \Rightarrow p_x^2 = 8m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_x = \pm\sqrt{8m} \xrightarrow{(*)} p_x = p_y = p_z = \pm 2\sqrt{2}m$$



Επειδή η εκφώνηση δεν μας διευκρινίζει αν οι συνιστώσες της ορμής είναι θετικές ή αρνητικές (μόνο ότι είναι ίσες), κρατάμε και τις δύο λύσεις (±)



$$[E, p_x, p_y, p_z] = [5m, \pm 2\sqrt{2}m, \pm 2\sqrt{2}m, \pm 2\sqrt{2}m]$$

ΘΕΜΑ 1 / c.

»Θ1/c/(α)

$$E = K + mc^2 = 5mc^2 + mc^2 = 6mc^2 \quad (\text{για το καθένα})$$

$$E_{\text{ολικη}} = 2E = 2 \cdot 6mc^2 = 12mc^2$$

$$E_{\text{ολικη}} = M_{\text{συστ.}} c^2 \Rightarrow 12m c^2 = M_{\text{συστ.}} c^2 \Rightarrow M_{\text{συστ.}} = 12m$$

2ος Τρόπος

$$K = (\gamma - 1)mc^2$$

$$5m c^2 = (\gamma - 1)m c^2$$

$$5 = \gamma - 1$$

$$\gamma = 6$$

$$M_{\text{συστ.}} = 2m_{\text{σχετ.}} = 2\gamma m = 2 \cdot 6m \Rightarrow M_{\text{συστ.}} = 12m$$

$$m_{\text{σχετ.}} = \gamma m$$

m : μάζα ηρεμίας

$m_{\text{σχετ.}}$: σχετικιστική μάζα

Απόδειξη του τύπου:

$$K = (\gamma - 1)mc^2$$

$$m_{\text{σχετ.}} = \gamma m \Rightarrow m_{\text{σχετ.}} c^2 = \gamma m c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{\text{σχετ.}} c^2 - mc^2 = \gamma m c^2 - mc^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = (\gamma - 1)mc^2$$

»Θ1/c/(β)

$$E = 6mc^2 \quad (\text{για το καθένα})$$

$$E_{\text{ολικη}} = 2E = 2 \cdot 6mc^2 = 12mc^2$$

$$E_{\text{ολικη}} = M_{\text{συστ.}} c^2 \Rightarrow 12m c^2 = M_{\text{συστ.}} c^2 \Rightarrow M_{\text{συστ.}} = 12m$$

2ος Τρόπος

$$E = 6mc^2$$

$$K = E - mc^2 = 6mc^2 - mc^2 = 5mc^2$$

$$K = (\gamma - 1)mc^2$$

$$5m c^2 = (\gamma - 1)m c^2$$

$$5 = \gamma - 1$$

$$\gamma = 6$$

$$M_{\text{συστ.}} = 2m_{\text{σχετ.}} = 2\gamma m = 2 \cdot 6m \Rightarrow M_{\text{συστ.}} = 12m$$

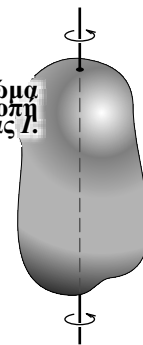
$$m_{\text{σχετ.}} = \gamma m$$

m : μάζα ηρεμίας

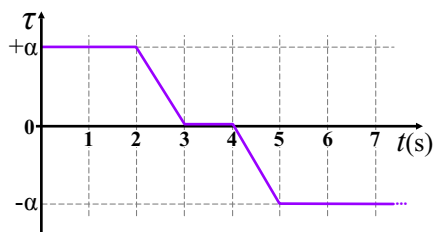
$m_{\text{σχετ.}}$: σχετικιστική μάζα

ΘΕΜΑ 2 / α.

Στερεό σώμα με ροπή αδράνειας I .



► **ΡΟΠΗ:** Από το διάγραμμα $\tau(t)$ έχουμε:



$\Delta t(s)$	0-2	2-3	3-4	4-5	5-...
$\tau(t)$	$+a$	$a(3-t)$	0	$a(4-t)$	$-a$

! **ορίζω:** $\beta = I^{-1}a$
 ...άρα: $\beta I = a$
 $\beta^2 I = a\beta$

» Για τα διαστήματα 2-3 s και 4-5 s βλέπουμε μια γραμμική εξάρτηση της ροπής από τον χρόνο της μορφής: $\tau = x + yt$.

2-3 s $t = 2 \text{ s} \rightarrow \tau = +a$:

$$a = x + y \cdot 2 \quad (1)$$

$t = 3 \text{ s} \rightarrow \tau = 0$:

$$0 = x + y \cdot 3 \quad (2)$$

$$(2): x = -3y \xrightarrow{(1)} a = -3y + y \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = -y \Rightarrow \boxed{y = -a}$$

$$(2): x = -3(-a) \Rightarrow \boxed{x = 3a}$$

$$\text{άρα: } 2-3 \text{ s: } \tau = 3a - at \Rightarrow \boxed{\tau = a(3-t)}$$

4-5 s $t = 4 \text{ s} \rightarrow \tau = 0$:

$$a = x' + y' \cdot 4 \quad (3)$$

$t = 5 \text{ s} \rightarrow \tau = -a$:

$$-a = x' + y' \cdot 5 \quad (4)$$

$$(3): x' = -4y' \xrightarrow{(4)} -a = -4y' + y' \cdot 5 \Rightarrow$$

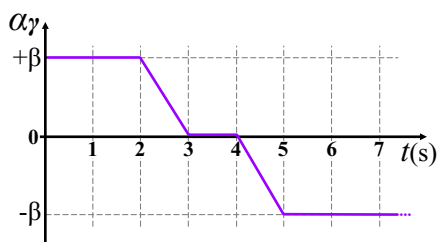
$$\Rightarrow -a = y' \Rightarrow \boxed{y' = -a}$$

$$(3): x' = -4(-a) \Rightarrow \boxed{x' = 4a}$$

$$\text{άρα: } 4-5 \text{ s: } \tau = 4a - at \Rightarrow \boxed{\tau = a(4-t)}$$

$\tau(0) = +a$
$\tau(2) = +a$
$\tau(3) = 0$
$\tau(4) = 0$
$\tau(5) = -a$

► **ΓΩΝΙΑΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ:** $\tau = I a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{\tau}{I} = I^{-1} \tau$



$\Delta t(s)$	0-2	2-3	3-4	4-5	5-...
$\tau(t)$	$+a$	$a(3-t)$	0	$a(4-t)$	$-a$

- 0-2 s: $a_\gamma = I^{-1}a = \beta$
- 2-3 s: $a_\gamma = I^{-1}a(3-t) = \beta(3-t)$
- 3-4 s: $a_\gamma = I^{-1}0 = 0$
- 4-5 s: $a_\gamma = I^{-1}a(4-t) = \beta(4-t)$
- 5-... s: $a_\gamma = I^{-1}(-a) = -\beta$

► **ΓΩΝΙΑΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ:**

$$\tau = I a_\gamma \Rightarrow \tau = I \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = I^{-1} \tau dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = I^{-1} \int_{t_0}^t \tau dt \Rightarrow \omega - \omega_0 = I^{-1} \int_{t_0}^t \tau dt \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \omega_0 + I^{-1} \int_{t_0}^t \tau(t) dt}$$

! Θεωρούμε ότι αρχικά το στερεό είναι ακίνητο $\omega(0)=0$

● 0-2 s: $\omega = \omega(0) + I^{-1} \int_{t_0}^t a dt = I^{-1} a \int_{t_0}^t dt = \beta \int_{t_0}^t dt = \beta(t-0) \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \beta t}$

» για $t = 2 \text{ s} \rightarrow \boxed{\omega(2) = 2\beta}$ (\$)



● 2-3 s: $\omega = \omega(2) + I^{-1} \int_2^t a(3-t)dt = 2\beta + I^{-1}a \int_2^t (3-t)dt = 2\beta + \beta \int_2^t 3dt - \beta \int_2^t tdt = 2\beta + \beta 3(t-2) - \beta \left(\frac{t^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) =$
 $= 2\beta + 3\beta t - 6\beta - \frac{1}{2}\beta t^2 + 2\beta \Rightarrow \boxed{\omega(t) = -2\beta + 3\beta t - \frac{1}{2}\beta t^2}$

► για $t = 2 \text{ s} \longrightarrow \omega = -2\beta + 3\beta 2 - \frac{1}{2}\beta 2^2 = -2\beta + 6\beta - 2\beta = 2\beta \stackrel{(S)}{=} \omega(2)$ (επαλήθευση συνέχειας)

► για $t = 3 \text{ s} \longrightarrow \omega = -2\beta + 3\beta 3 - \frac{1}{2}\beta 3^2 = -2\beta + 9\beta - 4.5\beta = 2.5\beta \longrightarrow \boxed{\omega(3) = 2.5\beta}$

● 3-4 s: $\omega = \omega(3) + I^{-1} \int_3^t 0dt = \omega(3) \Rightarrow \boxed{\omega(t) = 2.5\beta}$ (σταθερή)

► για $t = 4 \text{ s} \longrightarrow \boxed{\omega(4) = 2.5\beta}$ (\$\$)

● 4-5 s: $\omega = \omega(4) + I^{-1} \int_4^t a(4-t)dt = 2.5\beta + I^{-1}a \int_4^t (4-t)dt = 2.5\beta + \beta \int_4^t 4dt - \beta \int_4^t tdt = 2.5\beta + \beta 4(t-4) - \beta \left(\frac{t^2}{2} - \frac{4^2}{2}\right) =$
 $= 2.5\beta + 4\beta t - 16\beta - \frac{1}{2}\beta t^2 + 8\beta \Rightarrow \boxed{\omega(t) = -5.5\beta + 4\beta t - \frac{1}{2}\beta t^2}$

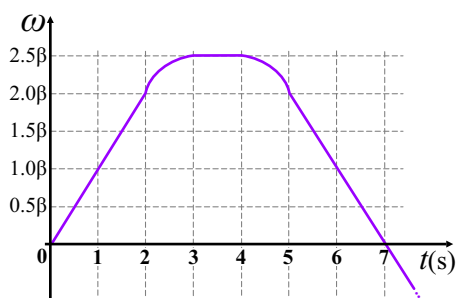
► για $t = 4 \text{ s} \longrightarrow \omega = -5.5\beta + 4\beta 4 - \frac{1}{2}\beta 4^2 = -5.5\beta + 16\beta - 8\beta = 2.5\beta \stackrel{(\$S)}{=} \omega(4)$ (επαλήθευση συνέχειας)

► για $t = 5 \text{ s} \longrightarrow \omega = -5.5\beta + 4\beta 5 - \frac{1}{2}\beta 5^2 = -5.5\beta + 20\beta - 12.5\beta = 2\beta \longrightarrow \boxed{\omega(5) = 2\beta}$ (\$\$\$)

● 5-... s: $\omega = \omega(5) + I^{-1} \int_5^t (-a)dt = 2\beta - I^{-1}a \int_5^t dt = 2\beta - \beta \int_5^t dt = 2\beta - \beta(t-5) = 2\beta - \beta t + \beta 5 \Rightarrow \boxed{\omega(t) = 7\beta - \beta t}$

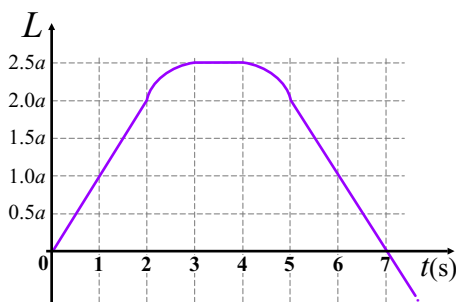
► για $t = 5 \text{ s} \longrightarrow \omega = 7\beta - \beta 5 = 2\beta \stackrel{(\$SS)}{=} \omega(5)$ (επαλήθευση συνέχειας)

➡ Παρατηρούμε ότι το $\omega(t)$ μηδενίζεται τη στιγμή: $0 = 7\beta - \beta t \Rightarrow \beta t = 7\beta \Rightarrow \boxed{t = 7 \text{ s}}$ και από εκεί και πέρα (με δεδομένη τη σταθερή αρνητική ροπή) το στερεό στρέφεται αντίθετα απ' ό,τι αρχικά.



$\Delta t(s)$	0-2	2-3	3-4	4-5	5-...
$\omega(t)$	βt	$-2\beta + 3\beta t - \frac{1}{2}\beta t^2$	2.5β	$-5.5\beta + 4\beta t - \frac{1}{2}\beta t^2$	$7\beta - \beta t$

➤ **ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ:** Γνωρίζουμε ότι $L=I\omega$ για ένα στερεό σώμα. Άρα για να βρούμε τη στροφορμή πολλαπλασιάζουμε $\times I$ το προηγούμενο πίνακάκι $\omega(t)$. Επειδή όμως $\beta I = I^{-1}aI = a$ έχουμε:



$\Delta t(s)$	0-2	2-3	3-4	4-5	5-...
$L(t)$	at	$-2a + 3at - \frac{1}{2}at^2$	$2.5a$	$-5.5a + 4at - \frac{1}{2}at^2$	$7a - at$

Αντίστοιχες τιμές (με a) θα έχει και ο άξονας L στο διάγραμμα.

► **ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ:** Γνωρίζουμε ότι $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ άρα από το πινακάκι του $\omega(t)$ έχουμε αντίστοιχα:

$$I\beta^2 = I\beta\beta = \underbrace{II^{-1}}_1 a\beta = a\beta$$

• 0-2 s: $K = \frac{1}{2} I(\beta t)^2 = \frac{1}{2} I\beta^2 t^2 \Rightarrow K(t) = \frac{1}{2} a\beta t^2$

$K(2) = \frac{1}{2} I\omega^2(2) = \frac{1}{2} I(2\beta)^2 = 2I\beta^2 \Rightarrow K(2) = 2a\beta$ $K(0) = 0$ [$\omega(0) = 0$]

• 2-3 s: $K = \frac{1}{2} I(-2\beta + 3\beta t - \frac{1}{2}\beta t^2)^2 = \frac{1}{2} I\beta^2(-2 + 3t - \frac{1}{2}t^2)^2 \Rightarrow K(t) = \frac{1}{2} a\beta(-2 + 3t - \frac{1}{2}t^2)^2$

$K(3) = \frac{1}{2} I\omega^2(3) = \frac{1}{2} I(2.5\beta)^2 = \frac{1}{2} 6.25I\beta^2 \Rightarrow K(3) = 3.125a\beta$

• 3-4 s: $K = \frac{1}{2} I(2.5\beta)^2 = \frac{1}{2} I6.25\beta^2 \Rightarrow K(t) = 3.125a\beta$

$K(4) = 3.125a\beta$

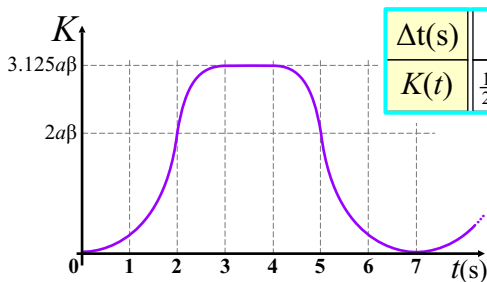
• 4-5 s: $K = \frac{1}{2} I(-5.5\beta + 4\beta t - \frac{1}{2}\beta t^2)^2 = \frac{1}{2} I\beta^2(-5.5 + 4t - \frac{1}{2}t^2)^2 \Rightarrow K(t) = \frac{1}{2} a\beta(-5.5 + 4t - \frac{1}{2}t^2)^2$

$K(5) = \frac{1}{2} I\omega^2(5) = \frac{1}{2} I(2\beta)^2 = 2I\beta^2 \Rightarrow K(5) = 2a\beta$

• 5-... s: $K = \frac{1}{2} I(7\beta - \beta t)^2 = \frac{1}{2} I\beta^2(7-t)^2 \Rightarrow K(t) = \frac{1}{2} a\beta(7-t)^2$

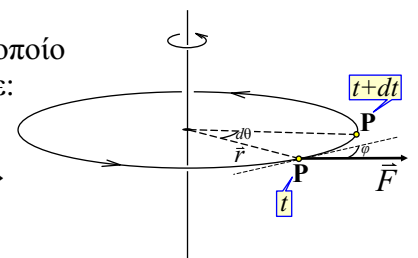
$K(5) = 2a\beta$ $K(7) = 0$

Ομοίως η K μηδενίζεται σε $t=7$ s όμως μετά τα 7 s συνεχίζει να αυξάνεται θετικά λόγω του "τετραγώνου" στο ω .



$\Delta t(s)$	0-2	2-3	3-4	4-5	5-...
$K(t)$	$\frac{1}{2} a\beta t^2$	$\frac{1}{2} a\beta(-2 + 3t - \frac{1}{2}t^2)^2$	$3.125a\beta$	$\frac{1}{2} a\beta(-5.5 + 4t - \frac{1}{2}t^2)^2$	$\frac{1}{2} a\beta(7-t)^2$

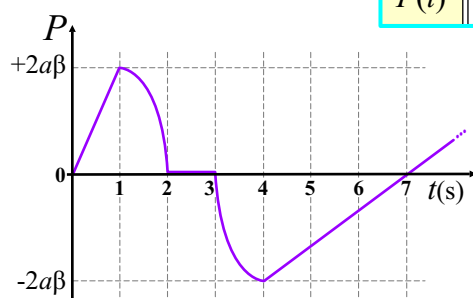
► **ΙΣΧΥΣ της ΡΟΠΗΣ:** Για ένα τυχαίο σημείο P του στερεού σώματος, στο οποίο ασκείται η δύναμη που προκαλεί τη ροπή $\tau(t)$ έχουμε:



► από t σε $t+dt$: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F \cos\phi dS = \overbrace{F \cos\phi}^{\tau} r d\theta = \underbrace{F_{\perp}}_r d\theta = \tau d\theta \rightarrow$
 $\xrightarrow{+dt} \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow P = \tau\omega \rightarrow P(t) = \tau(t) \cdot \omega(t)$

Από τα πινακάκια των $\tau(t)$ και $\omega(t)$ λοιπόν έχουμε:

$\Delta t(s)$	0-2	2-3	3-4	4-5	5-...
$P(t)$	$a\beta t$	$a\beta(3-t)(-2+3t-\frac{1}{2}t^2)$	0	$a\beta(4-t)(-5.5+4t-\frac{1}{2}t^2)$	$-a\beta(7-t)$



- $P(0) = \tau(0)\omega(0) = a \cdot 0 = 0$
- $P(2) = \tau(2)\omega(2) = a \cdot \beta \cdot 2 = 2a\beta$
- $P(3) = \tau(3)\omega(3) = 0 \cdot 2.5\beta = 0$
- $P(4) = \tau(4)\omega(4) = 0 \cdot 2.5\beta = 0$
- $P(5) = \tau(5)\omega(5) = -a \cdot \beta \cdot 2 = -2a\beta$

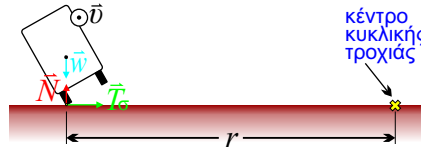
για $t = 7$ s $\Rightarrow P(7) = 0$
για $t > 0$ s $\Rightarrow P > 0$

ΘΕΜΑ 2 / b.

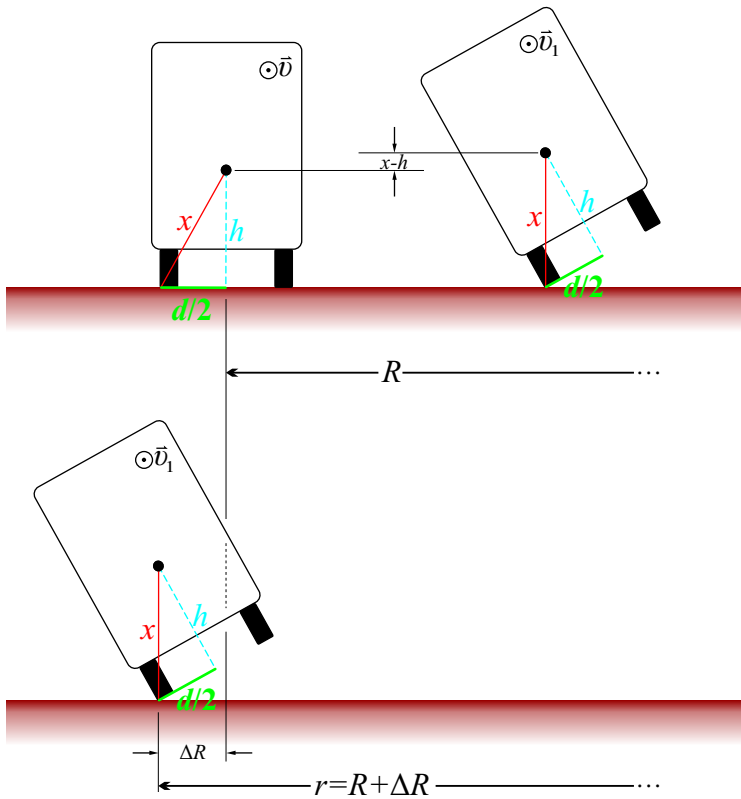
» Στην περίπτωση της μεγάλης ταχύτητας (μεγαλύτερης από $\sqrt{gdR/2h}$) το λεωφορείο σηκώνεται στους εξωτερικούς τροχούς του. Στο ανώτατο σημείο της “τροχιάς του κέντρου μάζας (cm) του” θέλουμε η τριβή να μην είναι ικανή να το κρατήσει σε κυκλική τροχιά (ακτίνας $r=R+\Delta R$) έτσι ώστε το λεωφορείο να γλυστρίσει προς τα έξω και τελικά να ξαναπέσει στις 4 ρόδες.

» Επειδή η τριβή παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης θα πρέπει:

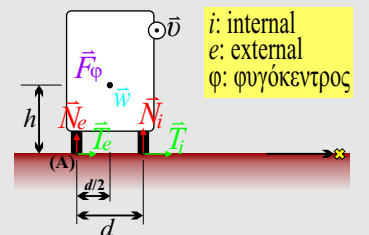
$$T < m \frac{v_1^2}{r} \Rightarrow \mu_\sigma mg < m \frac{v_1^2}{r} \Rightarrow \mu_\sigma < \frac{v_1^2}{gr} \quad (1)$$



» Η ταχύτητα v_1 είναι διαφορετική από την αρχική ταχύτητα v της κυκλικής τροχιάς αφού το cm σηκώνεται από το αρχικό του ύψος h στο τελικό x (κατά $\Delta h=x-h$):



Συνθήκη Έναρξης Ανατροπής



Στο σύστημα αναφοράς του λεωφορείου χρειαζόμαστε μια ψευδοδύναμη, τη φυγόκεντρο F_ϕ , η οποία δρα στο cm και έχει ίδιο μέτρο με την κεντρομόλο (mv^2/R). Η δύναμη αυτή μετέχει στη συνισταμένη ροπή ως προς το A.

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_{(A)} &= F_\phi h - w \frac{d}{2} + N_i d \\ \text{οριακά } \begin{matrix} N_i=0 \\ \Sigma \tau=0 \end{matrix} &\rightarrow F_\phi h = w \frac{d}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu \frac{v_{op.}^2}{R} h = \mu g \frac{d}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_{op.} = \sqrt{gdR/2h} \end{aligned}$$

• από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \mu v_1^2 + \mu g(x-h) \Rightarrow v_1^2 = v^2 - g(x-h) \quad (2)$$

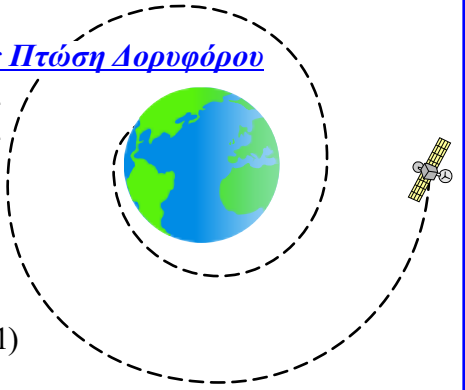
όπου: $x = \sqrt{h^2 + d^2/4}$
 πιθ.θεω. (3)

» Το cm μετατοπίζεται $x-h$ προς τα πάνω και $d/2$ προς τ' αριστερά, άρα η ακτίνα r της κυκλικής τροχιάς στην οριακή κατάσταση είναι $r=R+\Delta R=R+d/2$. Τελικά έχουμε:

$$(1): \mu_\sigma < \frac{v_1^2}{gr} \xrightarrow{(1)} \mu_\sigma < \frac{v^2 - g(x-h)}{g(R+d/2)} \xrightarrow{(3)} \mu_\sigma < \frac{v^2 - g(\sqrt{h^2 + d^2/4} - h)}{g(R+d/2)}$$

ΘΕΜΑ 2 / ε. Σπειροειδής Πτώση Δορυφόρου

► Για την επίλυση της άσκησης θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . Για την πρώτη και τη δεύτερη χρονική παράγωγο θα χρησιμοποιήσουμε ταυτόχρονα και τα σύμβολα: $\frac{d}{dt}$ & $\frac{d^2}{dt^2}$ και τα ' & ''



$$\gg \Sigma \vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d^2 (r \cdot \hat{r})}{dt^2} = m \frac{d}{dt} (r' \cdot \hat{r} + r \cdot \hat{r}') = m (r'' \cdot \hat{r} + 2r' \cdot \hat{r}' + r \cdot \hat{r}'') \quad (1)$$

$$\gg \hat{r}' = \theta' \cdot \hat{\theta} \quad (2) \quad \gg \hat{r}'' = \theta'' \cdot \hat{\theta} - \theta'^2 \cdot \hat{r} \quad (3) \quad \text{...όπου } \theta' = d\theta/dt = \omega \text{ (γωνιακή ταχύτητα)}$$

$$\gg (1)/(2),(3): \Sigma \vec{F} = m (r'' \cdot \hat{r} + 2r' \cdot \theta' \cdot \hat{\theta} + r \cdot \hat{\theta}'' \cdot \theta - r \cdot \theta'^2 \cdot \hat{r}) = m (r'' - r \cdot \theta'^2) \hat{r} + m (2r' \cdot \theta' + r \cdot \theta'') \hat{\theta}$$

$$\gg \Sigma \vec{F} = F_r \cdot \hat{r} + F_\theta \cdot \hat{\theta} \Rightarrow \begin{cases} F_r = m(r'' - r \cdot \theta'^2) \\ F_\theta = m(2r' \cdot \theta' + r \cdot \theta'') \end{cases} \quad (4)$$

$$\gg \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r \cdot \hat{r})}{dt} = r' \cdot \hat{r} + r \cdot \hat{r}' = r' \cdot \hat{r} + r \cdot \theta' \cdot \hat{\theta} \quad (5)$$

$$\gg \Sigma \vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} - k\vec{v} \xrightarrow{(5)} -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} - k \cdot r' \cdot \hat{r} - k \cdot r \cdot \theta' \cdot \hat{\theta} = [-G \frac{Mm}{r^2} - k \cdot r'] \hat{r} + [-k \cdot r \cdot \theta'] \hat{\theta} \quad (6)$$

$$\gg (4)/(6): \begin{cases} m(r'' - r \cdot \theta'^2) = -G \frac{Mm}{r^2} - k \cdot r' & \text{(I)} \\ m(2r' \cdot \theta' + r \cdot \theta'') = -k \cdot r \cdot \theta' & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\gg \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \theta') = \frac{1}{r} (2r r' \theta' + r^2 \theta'') = 2r' \theta' + r \theta'' \quad (*)$$

$$\text{(II): } 2r' \theta' + r \theta'' = -\frac{k}{m} \cdot r \theta' \xrightarrow{(*)} \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \theta') = -\frac{k}{m} \cdot r \theta' \Rightarrow \frac{d}{dt} (r^2 \theta') = -\frac{k}{m} \cdot r^2 \theta' \Rightarrow \frac{d(r^2 \theta')}{r^2 \theta'} = -\frac{k}{m} \cdot dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{r_0^2 \omega_0}^{r^2 \omega} \frac{d(r^2 \theta')}{r^2 \theta'} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt \Rightarrow \ln(r^2 \theta') \Big|_{r_0^2 \omega_0}^{r^2 \omega} = -\frac{k}{m} t \Big|_0^t \Rightarrow \ln(r^2 \theta') - \ln(r_0^2 \omega_0) = -\frac{k}{m} t \Rightarrow \ln \frac{r^2 \theta'}{r_0^2 \omega_0} = -\frac{k}{m} t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r^2 \theta'}{r_0^2 \omega_0} = e^{-\frac{k}{m} t} \Rightarrow r^2 \theta' = r_0^2 \omega_0 e^{-\frac{k}{m} t} \xrightarrow{\Lambda_0 = r_0^2 \omega_0} r^2 \theta' = \Lambda_0 e^{-\frac{k}{m} t} \quad \text{(III)}$$

$$\Lambda_0 = r_0^2 \omega_0 = r_0 r_0 \omega_0 = r_0 v_0 = \frac{m v_0 r_0}{m} = \frac{L_0}{m}$$

Η αρχική στροφορμή (L_0) του δορυφόρου δια την μάζα του

$$\gg \text{(I)} \xrightarrow{\text{(III): } \theta' = \frac{\Lambda_0 e^{-\frac{k}{m} t}}{r^2}} m \left(r'' - r \frac{\Lambda_0^2 e^{-2\frac{k}{m} t}}{r^4} \right) = -G \frac{Mm}{r^2} - k r' \Rightarrow r'' - \frac{\Lambda_0^2 e^{-2\frac{k}{m} t}}{r^3} = -G \frac{M}{r^2} - \frac{k}{m} r' \xrightarrow{\cdot r^3}$$

$$\rightarrow r^3 r'' - \Lambda_0^2 e^{-2\frac{k}{m} t} = -GM r - \frac{k}{m} r^3 r' \Rightarrow r^3 (r'' + \frac{k}{m} r') + GM r = \Lambda_0^2 e^{-2\frac{k}{m} t} \quad \Delta.E.$$

Διαφορική Εξίσωση Κίνησης

» Αν οι αρχικές τιμές της ακτίνας και της γωνιακής ταχύτητας του δορυφόρου είναι r_0 και ω_0 , η σχέση που τις συνδέει είναι:

$$F_{\text{κεντρ.}} = F_{\text{βαρυτ.}} \Rightarrow m \frac{v_0^2}{r_0} = G \frac{Mm}{r_0^2} \Rightarrow v_0^2 = \frac{GM}{r_0} \Rightarrow \omega_0^2 r_0^2 = \frac{GM}{r_0} \Rightarrow \boxed{GM = \omega_0^2 r_0^3}$$

➔ Αν θεωρήσουμε τη τριβή μικρή, τέτοια ώστε να μην επηρεάζει αισθητά την κίνηση σε χρόνο μιας περιόδου τότε: $k/\omega_0 \ll 1$

Οι προσεγγιστικές λύσεις της Δ.Ε. και της (III) είναι:

$$r(t) = r_0 e^{-\frac{k}{m}t} \quad \text{(A)}$$

$$\omega(t) = \theta'(t) = \omega_0 e^{+\frac{k}{m}t} \quad \text{(B)}$$

Επιβεβαιώσεις των λύσεων:

① Δ.Ε.: $r^3(r'' + \frac{k}{m}r') + GMr = \Lambda_0^2 e^{-\frac{2k}{m}t}$

$r = r_0 e^{-\frac{2k}{m}t}$	→	
$r' = -\frac{2k}{m} r_0 e^{-\frac{2k}{m}t}$	→	
$r'' = \frac{4k^2}{m^2} r_0 e^{-\frac{2k}{m}t}$	→	

$\Lambda_0 = \omega_0 r_0^2$
 $GM = \omega_0^2 r_0^3$

$$r_0^3 e^{-\frac{6k}{m}t} \left(\frac{4k^2}{m^2} r_0 e^{-\frac{2k}{m}t} - \frac{k}{m} \frac{2k}{m} r_0 e^{-\frac{2k}{m}t} \right) + \omega_0^2 r_0^3 r_0 e^{-\frac{2k}{m}t} = \omega_0^2 r_0^4 e^{-\frac{2k}{m}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4k^2}{m^2} r_0^4 e^{-\frac{8k}{m}t} - \frac{2k^2}{m^2} r_0^4 e^{-\frac{8k}{m}t} + \omega_0^2 r_0^4 e^{-\frac{2k}{m}t} = \omega_0^2 r_0^4 e^{-\frac{2k}{m}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2k^2}{m^2} e^{-\frac{8k}{m}t} + \omega_0^2 e^{-\frac{2k}{m}t} = \omega_0^2 e^{-\frac{2k}{m}t} \xrightarrow{+\omega_0^2} \frac{2}{m^2} \left(\frac{k}{\omega_0} \right)^2 e^{-\frac{8k}{m}t} + e^{-\frac{2k}{m}t} = e^{-\frac{2k}{m}t} \xrightarrow{k/\omega_0 \ll 1} e^{-\frac{2k}{m}t} = e^{-\frac{2k}{m}t} \quad \text{ισχύει!}$$

②

$$r = r_0 e^{-\frac{2k}{m}t}$$

$$\theta' = \omega_0 e^{\frac{3k}{m}t}$$

$$\Lambda_0 = \omega_0 r_0^2$$

(III): $r^2 \theta' = \Lambda_0^2 e^{-\frac{k}{m}t}$

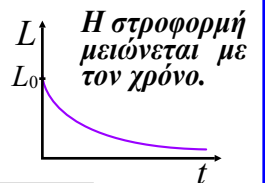
$$r_0^2 e^{-\frac{4k}{m}t} \omega_0 e^{\frac{3k}{m}t} = \omega_0 r_0^2 e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_0 r_0^2 e^{-\frac{k}{m}t} = \omega_0 r_0^2 e^{-\frac{k}{m}t} \quad \text{ισχύει!}$$

ΛΥΣΕΙΣ:

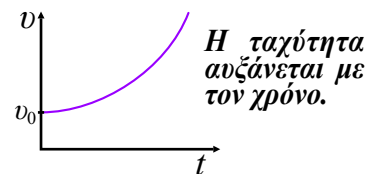
Θ2/c/i Εξίσωση Στροφορμής:

$$L = mvr = m\omega r^2 \xrightarrow{(A),(B)} L = m\omega_0 e^{\frac{3k}{m}t} r_0^2 e^{-\frac{4k}{m}t} = m\omega_0 r_0^2 e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow \boxed{L(t) = L_0 e^{-\frac{k}{m}t}}$$



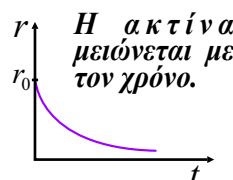
Θ2/c/ii Εξίσωση Ταχύτητας:

$$v = \omega r \xrightarrow{(A),(B)} v = \omega_0 e^{\frac{3k}{m}t} r_0 e^{-\frac{2k}{m}t} = \omega_0 r_0 e^{+\frac{k}{m}t} \Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 e^{+\frac{k}{m}t}}$$

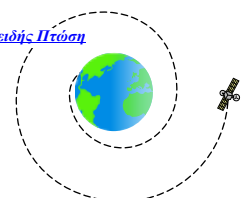


Θ2/c/iii Εξίσωση Ακτίνας:

$$\xrightarrow{(A)} \boxed{r(t) = r_0 e^{-\frac{2k}{m}t}}$$



Σπυροειδής Πτόση



ΘΕΜΑ 3 / α.

➤ Ανάλυση θέματος με βάση το άρθρο: “What Drives Glacial Cycles?” των W.S.Broecker & G.H.Denton από το *Scientific American*, Ιανουάριος 1990.

Οκτώ φορές τα τελευταία 1.000.000 χρόνια είχαμε παγκόσμια αλλαγή κλίματος. Οι λόγοι είναι κατά βάση αστρονομικοί σε συνδιασμό με τη σύζευξη των συστημάτων της ατμόσφαιρας, των ωκεανών και των παγετώνων. Οι πρώτες θεωρίες ξεκίνησαν στις αρχές του 19ου αιώνα και ουσιαστικά η επιστημονική κοινότητα κατέληξε σε ασφαλή (?) συμπεράσματα πριν από, περίπου, 40 χρόνια. Οι αστρονομικοί λόγοι έχουν να κάνουν με αλλαγές σε τρία χαρακτηριστικά της τροχιάς της Γης: στην εκκεντρότητα της τροχιάς, στον προσανατολισμό και στην μετάπτωση του άξονα περιστροφής.

Η ένταση της καλοκαιρινής λιακάδας αλλάζει με διαφορετικούς τρόπους (στα μεσαία πλάτη) στα δύο ημισφαίρια. Η ένταση αυτή με τη σειρά της επηρεάζει τη δημιουργία ή το λιώσιμο των πάγων.

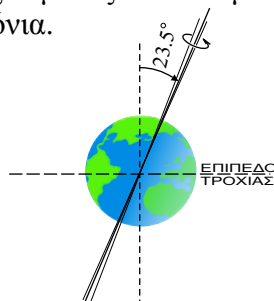
Μείωση της καλοκαιρινής λιακάδας επιτρέπει στον πάγο να σχηματιστεί. Στη συνέχεια ο πάγος αλλάζει το κλίμα της Γης και επηρεάζει γενικότερα τα κλιματικά φαινόμενα. Αλλάζοντας τους τρόπους εξάτμισης και βροχοπτώσεων (λόγω αλλαγής της έντασης των εποχών) το συζευγμένο σύστημα ωκεανών - ατμόσφαιρας αλλάζει από τον έναν τρόπο λειτουργίας σε έναν άλλο πολύ διαφορετικότερο. Με κάθε τέτοια αλλαγή, αλλάζει η ροή των ωκεανών και άρα η θερμότητα που μεταφέρεται σε όλη τη Γήινη σφαίρα. Στη συνέχεια αλλάζουν οι ιδιότητες της ατμόσφαιρας και το κλίμα γενικότερα. Αποτέλεσμα όλων των παραπάνω είναι η αύξηση ή μείωση των φύλλων πάγου (των περιοχών, δηλαδή, που είναι καλυμμένες με χιόνι ή πάγο).

Η υπόθεση της αστρονομικής συσχέτισης ξεκινάει το 1842 από τον μαθηματικό J.Adhemar ο οποίος πρότεινε μια θεωρία κατά την οποία οι αστρονομικές κινήσεις και αλλαγές επηρεάζουν την ένταση των εποχών. Αυτή με τη σειρά της μπορεί να ξεκινήσει ή να τερματίσει μια εκτενέστερη εποχή παγετώνων.

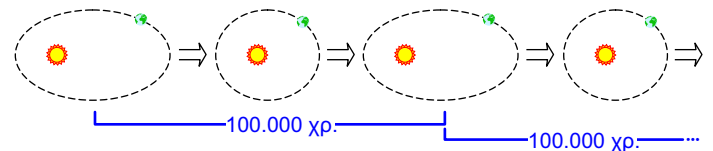
Στη συνέχεια (στις δεκαετίες του 1920 και 1930) ο αστρονόμος M.Milankovitch προτείνει μια πιο αναλυτική θεωρία αστρονομικής συσχέτισης με το κλίμα. Η θεωρία του περιέχει τρεις παράγοντες:

1ος Ο προσανατολισμός του άξονα περιστροφής σε σχέση με το επίπεδο της τροχιάς: ως προς τον κάθετο, στην τροχιά, άξονα ο άξονας περιστροφής της Γης σχηματίζει μια γωνία (που σήμερα είναι 23.5°). Η γωνία αυτή αλλάζει μεταξύ των τιμών 21.5° και 24.5° κάθε 41.000 χρόνια.

Όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η γωνία τόσο πιο έντονες είναι οι εποχές (θερμότερα καλοκαίρια και ψυχρότεροι χειμώνες).

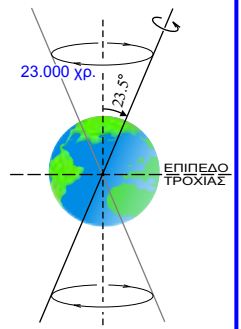


2ος Το σχήμα της τροχιάς της Γης (η εκκεντρότητα της τροχιάς): κάθε 100.000 χρόνια το σχήμα της τροχιάς αυξομειώνεται από ελλειπσοειδές σε σχεδόν κυκλικό. Όσο η εκκεντρότητα αυξάνεται, η απόσταση Γης - Ήλιου στο περιήλιο και στο αφήλιο αυξάνεται, επηρεάζοντας (ανάποδα) τις εποχές σε κάθε ημισφαί-



ριο. Τη σημερινή εποχή η Γη φτάνει στη μεγαλύτερη απόστασή της από τον Ήλιο κατά τη διάρκεια του χειμώνα του νοτίου ημισφαιρίου. Αυτό σημαίνει ότι οι νότιοι χειμώνες θα είναι πιο ψυχροί από τους βόρειους και τα νότια καλοκαίρια πιο θερμά αντίστοιχα.

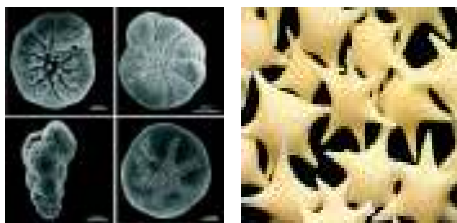
3ος Ο συσχετισμός μεταξύ των άλλων δύο παραγόντων που εκφράζεται από το φαινόμενο της μετάπτωσης του άξονα περιστροφής: μια κωνοειδής κίνηση του άξονα με περίοδο 23.000 χρόνια και κατεύθυνση ανάποδη απ' αυτήν που διαγράφεται ο ζωδιακός κύκλος στην ουράνια σφαίρα. Η μετάπτωση καθορίζει αν ένα καλοκαίρι σε ένα δεδομένο ημισφαίριο πέφτει σε κοντινό ή μακρινό σημείο της τροχιάς. Επίσης καθορίζει αν η εποχικότητα λόγω προσανατολισμού του άξονα (1ος παράγοντας) υποβοηθάται ή αναιρείται από την εποχικότητα λόγω εκκεντρότητας (2ος παράγοντας). Όταν οι δύο παράγοντες συνδιάζονται σε ένα ημισφαίριο, αναιρούνται στο άλλο.



Η υπόθεση του Milankovitch ήταν ότι οι τρεις αυτοί παράγοντες επηρεάζουν την ηλιοφάνεια σε ποσοστό από -20% έως $+20\%$, αρκετό ώστε να αναπτυχθούν τα φύλλα πάγου κατά τη διάρκεια δροσερών καλοκαιριών ή ήπιων χειμώνων.

Η θεωρία αυτή του Milankovitch παρέμεινε θεωρία μέχρι το 1950, όπου και άρχισε μια πιο συστηματική μελέτη από τον C.Emiliani, η οποία τελικά κατέληξε στην επιβεβαίωσή της:

τα στοιχεία προήλθαν από το βυθό της θάλασσας. Πιο συγκεκριμένα από τα κελήφη κάποιων μονοκύτταρων θαλάσσιων οργανισμών (foraminifera) τα οποία αποτελούνταν από CaCO_3 . Το κλειδί βρισκό-



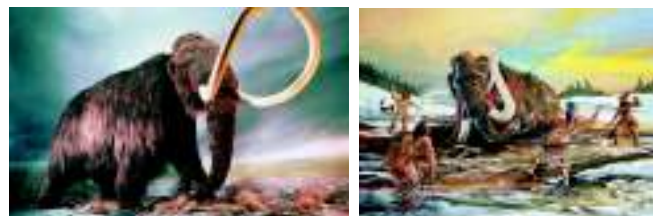
νταν στο οξυγόνο της ένωσης και συγκεκριμένα στο ισότοπο O-18. Το ισότοπο αυτό έχει ποσοστό στην ένωση CaCO_3 ανάλογο της παρουσίας του στα μόρια του H_2O των θαλασσών και ανάλογο με την εποχή που έζησαν τα foraminifera. Επειδή το O-18 είναι (κατά λίγο) βαρύτερο από το κοινό O-16, αντίστοιχα βαρύτερο θα είναι και το μόριο του νερού. Κατά την εξάτμιση λοιπόν του θαλασσινού νερού, πολλά περισσότερα μόρια από το “ελαφρύ” νερό θα εξατμίζονται σε σχέση με αυτά από το “βαρύ”. Σε εποχές λοιπόν που υπήρχαν πολλοί παγετώνες, οι ωκεανοί ήταν πολύ πλουσιότεροι σε O-18 (αφού το O-16 ήταν στο νερό των παγετώνων), άρα το CaCO_3 των οστράκων των foraminifera και κατ’ επέκταση και η άμμος των βυθών. Αναλύοντας λοιπόν τα ποσοστά O-18 σε πυρήνες άμμου που εξορύχτηκαν από τους βυθούς, ο Emiliani επιβεβαίωσε τη θεωρία του Milankovitch. Τελικά το 1976 οι J.Hayas, J.Imbrie και N.Shackleton έδειξαν ότι το αρχείο των εξορυγμένων πυρήνην άμμου παρουσιάζει τις ίδιες περιοδικότητες με τις τροχιακές περιοδικότητες της Γης:

-Τα τελευταία 800.000 χρόνια έχουμε μεγιστοποιήσεις στην παγκόσμια ποσότητα πάγου κάθε 100.000 χρόνια (ταιριάζει με τον κύκλο της εκκεντρότητας).

-Κάθε τέτοια μεγάλη περίοδο έχουμε μικρότερες αυξομειώσεις κάθε 23.000 και 41.000 χρόνια (που ταιριάζουν με τους κύκλους μετάπτωσης και γωνίας προσανατολισμού του άξονα της Γης).

Φυσικά το φαινόμενο των παγετώνων είναι πολύ πιο σύνθετο. Παράγοντες που υπεισέρχονται είναι επίσης η κυκλοφορία των αέριων μαζών στην ατμόσφαιρα, τα ωκεάνια θαλάσσια ρεύματα, τα ποσοστά NaCl σε αυτά, το CO_2 και το CH_4 της ατμόσφαιρας ακόμα και η αερομεταφερόμενη σκόνη. Η απαρχή και πυροδότηση όλων αυτών των φαινομένων όμως είναι οι αστρονομικές κινήσεις της Γης.

Οι περιοδικές αυτές αλλαγές στο κλίμα (και ίσως, σύμφωνα με νεότερες θεωρίες, κάποια “κβαντικά” άλματα αλλαγών στο κλίμα) επεκτίνονται μέχρι την εξέλιξη των ειδών. Είναι γνωστό, για παράδειγμα, ότι ακόμα και αν δεν τα είχε εξοντώσει μέχρι εξαφάνισης ο άνθρωπος, τα μαμούθ θα είχαν “πεθάνει από τη ζέστη”. Καθώς το τέλος της εποχής των παγετώνων έ-



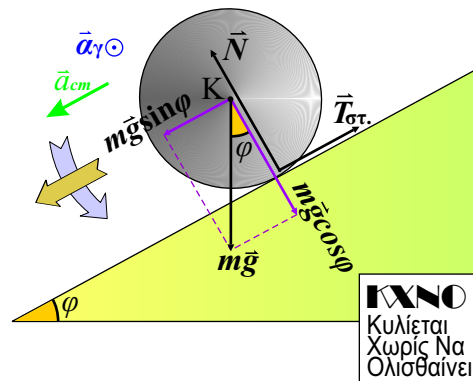
τανε, τα μαμούθ δεν προλάβαν να προσαρμοστούν με αποτέλεσμα η νέα θερμότερη εποχή να τα βρεί με πολύ μαλλί. Αντίστοιχες εξαφανίσεις υπήρξαν και σε άλλα είδη (όπως ο σμιλόδοντας ή το γιγάντιο πουλί



του τρόμου kelenken) όταν λόγω αλλαγής κλίματος εξαφανίστηκαν πρώτα μικρότερα είδη που αποτελούσαν την τροφή τους.

ΘΕΜΑ 3 / b. / i

Η μοναδική δύναμη που δεν διέρχεται από τον άξονα περιστροφής και άρα έχει ροπή (και μπορεί να προκαλέσει την περιστροφή) είναι η στατική τριβή. Λόγω της φοράς περιστροφής η τριβή θα πρέπει να είναι προς τα πίσω/πάνω ώστε η ροπή της να μπορεί να προκαλέσει αυτή τη περιστροφή.



$$\Sigma \tau = I a_\gamma \Rightarrow T_\sigma R = \frac{1}{2} m R^2 a_\gamma \Rightarrow T_\sigma = \frac{1}{2} m R a_\gamma \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = m a_{cm} \Rightarrow m g \sin \phi - T_\sigma = m a_{cm} \xrightarrow{(1)} m g \sin \phi - \frac{1}{2} m R a_\gamma = m a_{cm} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{a_{cm} = a_\gamma R \Rightarrow a_\gamma = a_{cm} / R} g \sin \phi - \frac{1}{2} R \frac{a_{cm}}{R} = a_{cm} \Rightarrow g \sin \phi - \frac{1}{2} a_{cm} = a_{cm} \Rightarrow g \sin \phi = \frac{3}{2} a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2}{3} g \sin \phi$$

απόδειξη του τύπου: $a_{cm} = a_\gamma R$ $S \stackrel{\text{ΚΥΝΟ}}{\hat{=}} \hat{S} \Rightarrow S = R\theta \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} \xrightarrow{R=f(t)} v_{cm} = \theta \frac{dR}{dt} + R \frac{d\theta}{dt} \xrightarrow{\frac{dR}{dt}=\lambda} v_{cm} = \theta \cdot \lambda + R \cdot \omega \Rightarrow$

ΘΕΜΑ 3 / b. / ii

Η επίλυση θα γίνει με αναφορά στο σχήμα του προηγούμενου ερωτήματος αλλά με μετεβλητή ακτίνα ($dR/dt=\lambda$)

$$\xrightarrow{\text{ΚΥΝΟ}} \hat{S} \Rightarrow S = R\theta \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} \xrightarrow{R=f(t)} v_{cm} = \theta \frac{dR}{dt} + R \frac{d\theta}{dt} \xrightarrow{\frac{dR}{dt}=\lambda} v_{cm} = \theta \cdot \lambda + R \cdot \omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(\theta \cdot \lambda + R \cdot \omega) = \frac{d(\theta \cdot \lambda)}{dt} + \frac{d(R \cdot \omega)}{dt} \Rightarrow a_{cm} = \lambda \frac{d\theta}{dt} + \omega \frac{dR}{dt} + R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{cm} = \lambda \cdot \omega + \omega \cdot \lambda + R \cdot a_\gamma \Rightarrow a_{cm} = 2\lambda \cdot \omega + R \cdot a_\gamma \quad (*)$$

$$\Sigma \tau = I a_\gamma \Rightarrow T_\sigma R = \frac{1}{2} m R^2 a_\gamma \Rightarrow T_\sigma = \frac{1}{2} m R a_\gamma \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = m a_{cm} \Rightarrow m g \sin \phi - T_\sigma = m a_{cm} \Rightarrow m g \sin \phi = T_\sigma + m a_{cm} \xrightarrow{(1)} m g \sin \phi = \frac{1}{2} m R a_\gamma + m a_{cm} \xrightarrow{(*)} \rightarrow$$

$$\rightarrow g \sin \phi = \frac{1}{2} R a_\gamma + 2\lambda \omega + R a_\gamma \Rightarrow g \sin \phi = \frac{3}{2} R a_\gamma + 2\lambda \omega \Rightarrow g \sin \phi = \frac{3}{2} R \frac{d\omega}{dt} + 2\lambda \omega \Rightarrow$$

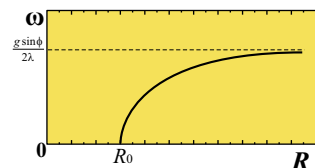
$$\Rightarrow g \sin \phi = \frac{3}{2} R \frac{d\omega}{dR} \frac{dR}{dt} + 2\lambda \omega \xrightarrow{\frac{dR}{dt}=\lambda} g \sin \phi = \frac{3}{2} R \frac{d\omega}{dR} \lambda + 2\lambda \omega \xrightarrow{\times \frac{2}{3\lambda}} \frac{2g \sin \phi}{3\lambda} = R \frac{d\omega}{dR} + \frac{4}{3} \omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R \frac{d\omega}{dR} + \frac{4}{3} \omega = \frac{2g \sin \phi}{3\lambda}$$

Διαφορική εξίσωση μεταξύ ω, R

της μορφής: $x \cdot y' + A \cdot y = B$...με λύση: $y(x) = \frac{c_1}{x^A} + \frac{B}{A}$
 σύμφωνα με το www.wolframalpha.com
 "General Differential Equation Solver"

➤ Λύση της Δ.Ε.: $\omega(R) = \frac{c_1}{R^{4/3}} + \frac{2g \sin \phi / 3\lambda}{4/3} \Rightarrow \omega(R) = \frac{c_1}{R^{4/3}} + \frac{g \sin \phi}{2\lambda}$



$R = R_0 (t = 0): \omega_0 = 0$ Αρχικές Συνθήκες

$$0 = \frac{c_1}{R_0^{4/3}} + \frac{g \sin \phi}{2\lambda} \Rightarrow c_1 = -\frac{g \sin \phi}{2\lambda} R_0^{4/3}$$

$$\omega(R) = -\frac{g \sin \phi}{2\lambda} \frac{R_0^{4/3}}{R^{4/3}} + \frac{g \sin \phi}{2\lambda} \Rightarrow \omega(R) = \frac{g \sin \phi}{2\lambda} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{4/3} \right]$$

» Η προηγούμενη λύση $\omega(R)$ μετατρέπεται σε $\omega(t)$ με αντικατάσταση του $R=R_0+\lambda t$:

$$\omega(t) = \frac{g \sin \phi}{2\lambda} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_0 + \lambda t} \right)^{4/3} \right]$$

$$\frac{dR}{dt} = \lambda \Rightarrow dR = \lambda dt \Rightarrow \int_{R_0}^R dR = \lambda \int_0^t dt \Rightarrow \\ \Rightarrow R - R_0 = \lambda(t - 0) \Rightarrow \boxed{R = R_0 + \lambda t}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega \cdot dt \Rightarrow \int_0^\theta d\theta = \int_0^t \omega \cdot dt \Rightarrow \theta - 0 = \frac{g \sin \phi}{2\lambda} \int_0^t \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_0 + \lambda t} \right)^{4/3} \right] dt \Rightarrow$$

$$d(R_0 + \lambda t) = \lambda dt \Rightarrow \\ \Rightarrow dt = \frac{d(R_0 + \lambda t)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{g \sin \phi}{2\lambda} \left[\int_0^t dt - \int_0^t \left(\frac{R_0}{R_0 + \lambda t} \right)^{4/3} dt \right] = \frac{g \sin \phi}{2\lambda} \left[(t - 0) - \frac{R_0^{4/3}}{\lambda} \int_0^t \frac{d(R_0 + \lambda t)}{(R_0 + \lambda t)^{4/3}} \right] =$$

$$= \frac{g \sin \phi}{2\lambda} \left[t - \frac{R_0^{4/3}}{\lambda} \frac{(R_0 + \lambda t)^{-4/3+1}}{-4/3+1} \right]_0^t = \frac{g \sin \phi}{2\lambda} \left[t - \frac{R_0^{4/3}}{\lambda} \frac{(R_0 + \lambda t)^{-1/3}}{-1/3} \right]_0^t = \frac{g \sin \phi}{2\lambda} \left[t + \frac{3R_0^{4/3}}{\lambda} [(R_0 + \lambda t)^{-1/3} - R_0^{-1/3}] \right] =$$

$$= \frac{g \sin \phi}{2\lambda} \left[t + \frac{3R_0^{4/3}}{\lambda} (R_0 + \lambda t)^{-1/3} - \frac{3R_0}{\lambda} \right] \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{g \sin \phi}{2\lambda^2} [\lambda t + 3R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-1/3} - 3R_0]}$$

» Για να βρούμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας χρησιμοποιούμε τον τύπο $v_{cm} = \theta\lambda + R\omega$:

$$v_{cm} = \theta \cdot \lambda + R \cdot \omega \Rightarrow v_{cm} = \frac{g \sin \phi}{2\lambda} [\lambda t + 3R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-1/3} - 3R_0] + (R_0 + \lambda t) \frac{g \sin \phi}{2\lambda} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_0 + \lambda t} \right)^{4/3} \right] =$$

$$= \frac{g \sin \phi}{2\lambda} \left[\lambda t + 3R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-1/3} - 3R_0 + R_0 + \lambda t - (R_0 + \lambda t) \frac{R_0^{4/3}}{(R_0 + \lambda t)^{4/3}} \right] =$$

$$= \frac{g \sin \phi}{2\lambda} [2\lambda t - 2R_0 + 3R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-1/3} - R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-1/3}] =$$

$$= \frac{g \sin \phi}{\cancel{2}\lambda} [\cancel{2}\lambda t - \cancel{2}R_0 + \cancel{2}R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-1/3}] \Rightarrow \boxed{v_{cm}(t) = \frac{g \sin \phi}{\lambda} [\lambda t + R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-1/3} - R_0]}$$

» Για την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και την γωνιακή επιτάχυνση θα παραγωγίσουμε αντίστοιχα τους τύπους της ταχύτητας του κέντρου μάζας και της γωνιακής ταχύτητας:

$$a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{g \sin \phi}{\lambda} [\lambda t + R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-1/3} - R_0] \right] =$$

$$= \frac{g \sin \phi}{\lambda} [\lambda + R_0^{4/3} (-\frac{1}{3})(R_0 + \lambda t)^{-4/3} \lambda] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{cm}(t) = g \sin \phi \left[1 - \frac{1}{3} R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-4/3} \right]}$$

$$a_\gamma = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{g \sin \phi}{2\lambda} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_0 + \lambda t} \right)^{4/3} \right] \right] =$$

$$= \frac{g \sin \phi}{2\lambda} [0 - R_0^{4/3} (-\frac{4}{3})(R_0 + \lambda t)^{-4/3-1} \lambda] =$$

$$= \frac{g \sin \phi}{2} R_0^{4/3} \frac{4}{3} (R_0 + \lambda t)^{-7/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_\gamma(t) = \frac{2g \sin \phi}{3} R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-7/3}}$$

ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΩΝ ΜΕΧΡΙ ΤΩΡΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ:

♦ Θα πρέπει: $a_{cm} = 2\lambda\omega + Ra_\gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow g \sin\phi \left[1 - \frac{1}{3} R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-4/3} \right] = 2\lambda \frac{g \sin\phi}{2\lambda} \left[1 - R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-4/3} \right] + (R_0 + \lambda t) \frac{2g \sin\phi}{3} R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-7/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{g \sin\phi} \left[1 - \frac{1}{3} R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-4/3} \right] = \cancel{g \sin\phi} \left[1 - R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-4/3} \right] + \frac{2}{3} R_0^{4/3} (R_0 + \lambda t)^{-4/3} \Rightarrow -\frac{1}{3} = -1 + \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \quad \text{ισχύει!}$$

» Για να βρούμε την εξίσωση της θέσης θα ολοκληρώσουμε την εξίσωση της ταχύτητας του κέντρου μάζας:

$$v_{cm} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_{cm} dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v_{cm} dt \Rightarrow x - 0 = \frac{g \sin\phi}{\lambda} \left[\lambda \int_0^t t dt + R_0^{4/3} \int_0^t (R_0 + \lambda t)^{-1/3} dt - R_0 \int_0^t dt \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{g \sin\phi}{\lambda} \left[\lambda \frac{t^2}{2} \Big|_0^t + \frac{R_0^{4/3}}{\lambda} \int_0^t (R_0 + \lambda t)^{-1/3} d(R_0 + \lambda t) - R_0 t \Big|_0^t \right] = \frac{g \sin\phi}{\lambda} \left[\lambda \frac{t^2}{2} - R_0 t + \frac{R_0^{4/3}}{\lambda} \frac{(R_0 + \lambda t)^{-1/3+1}}{-1/3+1} \Big|_0^t \right] =$$

$$= \frac{g \sin\phi}{\lambda} \left[\lambda \frac{t^2}{2} - R_0 t + \frac{R_0^{4/3}}{\lambda} \frac{(R_0 + \lambda t)^{2/3}}{2/3} \Big|_0^t \right] = \frac{g \sin\phi}{\lambda} \left[\lambda \frac{t^2}{2} - R_0 t + \frac{3R_0^{4/3}}{2\lambda} (R_0 + \lambda t)^{2/3} - \frac{3R_0^{4/3}}{2\lambda} R_0^{2/3} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{g \sin\phi}{\lambda} \left[\lambda \frac{t^2}{2} - R_0 t + \frac{3R_0^{4/3}}{2\lambda} (R_0 + \lambda t)^{2/3} - \frac{3R_0^2}{2\lambda} \right]$$

ΘΕΜΑ 4 / α.

Απαντήσεις σύμφωνα με τα σύμβολα στις παραγράφους 23-1 και 23-2 του Feynman.

→ Οι γενικές εξισώσεις που δίνουν τα ρ^2 και $\tan\theta$ (στην εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση) είναι:

$$\rho^2 = \frac{1}{m^2[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} \quad \& \quad \tan\theta = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

→ Για πολύ μικρές αποσβέσεις (γ : πολύ μικρό $\Rightarrow \gamma \ll \omega_0$) και συχνότητες κοντά στην ιδοσυχνότητα ($\omega \approx \omega_0$) έχουμε:

- $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx (\omega - \omega_0)2\omega_0$
- $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx (\omega_0 - \omega)2\omega_0$
- $\gamma\omega \approx \gamma\omega_0$

→ Με αυτές τις προσεγγίσεις οι εξισώσεις των ρ^2 και $\tan\theta$ γίνονται:

$$\rho^2 \approx \frac{1}{m^2[4\omega_0^2(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2\omega_0^2]} \xrightarrow{(\omega - \omega_0)^2 = (\omega_0 - \omega)^2} \rho^2 \approx \frac{1}{4m^2\omega_0^2[(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4]} \quad (1)$$

$$\tan\theta \approx -\frac{\gamma\omega_0}{2\omega_0(\omega_0 - \omega)} \Rightarrow \tan\theta \approx -\frac{\gamma}{2(\omega_0 - \omega)} \quad (2)$$



➔ Η μέγιστη τιμή του ρ^2 προκύπτει στον συντονισμό ($\omega = \omega_0$), άρα είναι:

$$\rho_{\max}^2 \approx \frac{1}{4m^2\omega_0^2[(\omega_0 - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]} \Rightarrow \rho_{\max}^2 \approx \frac{1}{m^2\omega_0^2\gamma^2}$$

➔ Για να βρούμε σε ποιά (ποιές) συχνότητα η καμπύλη παίρνει τη μισή από τη μέγιστη τιμή της, αντικαθιστούμε το $\frac{1}{2}\rho_{\max}^2$ στη σχέση (1):

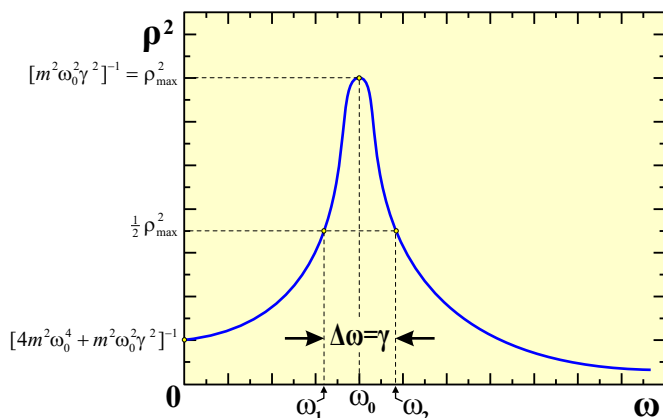
$$\frac{1}{2} \frac{1}{m^2\omega_0^2\gamma^2} = \frac{1}{4m^2\omega_0^2[(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4]} \Rightarrow 2[(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4] = \gamma^2 \Rightarrow (\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4} = \frac{\gamma^2}{2} \Rightarrow (\omega_0 - \omega)^2 = \frac{\gamma^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_0 - \omega = \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4}} \Rightarrow \omega_0 - \omega = \pm \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 \mp \frac{\gamma}{2}} \quad \dots \text{άρα:} \quad \boxed{\omega_1 = \omega_0 - \frac{\gamma}{2}} \quad \& \quad \boxed{\omega_2 = \omega_0 + \frac{\gamma}{2}}$$

➔ Το εύρος των συχνοτήτων $\Delta\omega$ στο οποίο παρατηρείται το μισό της μέγιστης τιμής του ρ^2 είναι:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = (\omega_0 + \frac{\gamma}{2}) - (\omega_0 - \frac{\gamma}{2}) = \omega_0 + \frac{\gamma}{2} - \omega_0 + \frac{\gamma}{2} = \gamma \Rightarrow \boxed{\Delta\omega = \gamma}$$

έτσι έχουμε την καμπύλη της εξίσωσης (1):

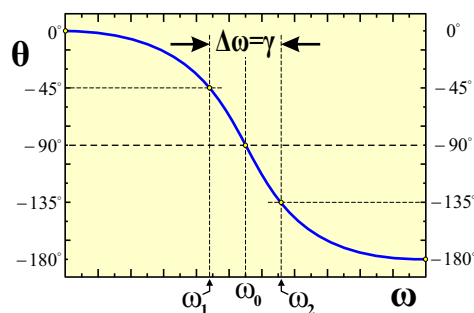


➔ Αντίστοιχα για την εφαπτομένη του τύπου (2) έχουμε:

$$\boxed{\omega_1 = \omega_0 - \frac{\gamma}{2}} \quad \tan\theta_1 \approx -\frac{\gamma}{2(\omega_0 - \omega_1)} = -\frac{\gamma}{2(\omega_0 - \omega_0 + \frac{\gamma}{2})} = -\frac{\gamma}{\gamma} = -1 \Rightarrow \boxed{\theta_1 = -45^\circ} \quad \text{ή} \quad \theta_1 = 135^\circ$$

$$\boxed{\omega_2 = \omega_0 + \frac{\gamma}{2}} \quad \tan\theta_2 \approx -\frac{\gamma}{2(\omega_0 - \omega_2)} = -\frac{\gamma}{2(\omega_0 - \omega_0 - \frac{\gamma}{2})} = -\frac{\gamma}{-\gamma} = +1 \Rightarrow \theta_2 = 45^\circ \quad \text{ή} \quad \boxed{\theta_2 = -135^\circ}$$

Έτσι έχουμε και την αντίστοιχη καμπύλη της εξίσωσης (2):

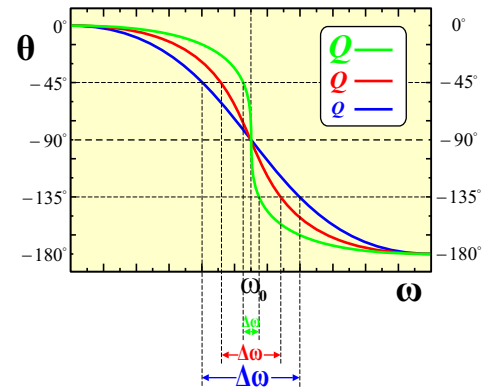
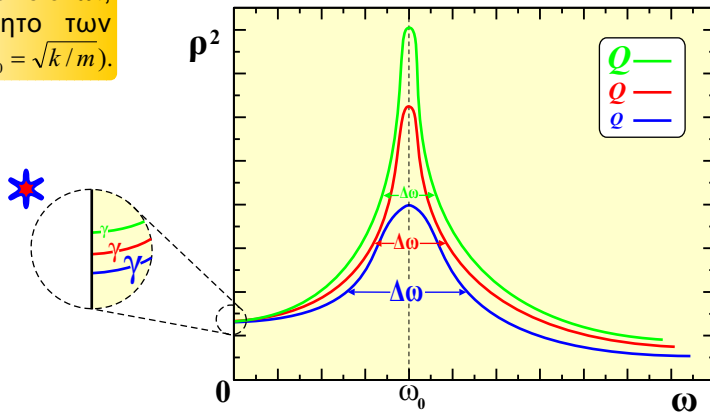


➔ Ο συντελεστής ποιότητας Q ορίζεται το πηλίκο: $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$ και λύνοντας έχουμε: $\gamma = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

Ο συντελεστής ποιότητας (σύμφωνα με τον τελευταίο τύπο) δείχνει πόσες φορές στενότερη είναι η καμπύλη γύρω από την ιδιοσυχνότητα σε σχέση με την ίδια την ιδιοσυχνότητα. Αν για παράδειγμα $Q=5$ τότε η καμπύλη έχει $\Delta\omega = \omega_0/5$ δηλαδή για την τιμή $\frac{1}{2} \rho_{\max}^2$ έχουμε εύρος καμπύλης ίσο με το $1/5$ της τιμής του ω_0 . Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι όσο μεγαλύτερο είναι το Q τόσο μικρότερο είναι το $\Delta\omega$, δηλαδή τόσο στενότερη είναι η καμπύλη $\rho^2 - \omega$. Και επειδή $\Delta\omega = \gamma$, όσο μεγαλύτερο είναι το Q τόσο μικρότερο είναι το γ δηλαδή οι αποσβέσεις που "ιώθει" το σύστημα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η μέγιστη τιμή του ρ^2 (που είναι $\rho_{\max}^2 \approx [m^2 \omega_0^2 \gamma^2]^{-1}$ στην κατάσταση συντονισμού $\omega = \omega_0$) να είναι μεγαλύτερη.

Q : μεγάλο $\rightarrow \Delta\omega$: μικρό (στενή καμπύλη) + $\gamma = \Delta\omega$: μικρό $\Rightarrow \rho_{\max}^2$: μεγάλο (ψηλή καμπύλη)

Όλες οι καμπύλες έχουν το ίδιο ω_0 , ανεξάρτητο των Q, γ ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$).



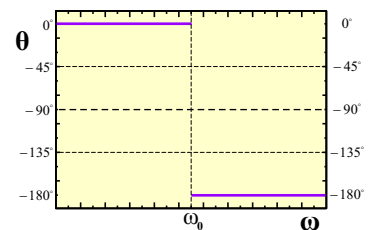
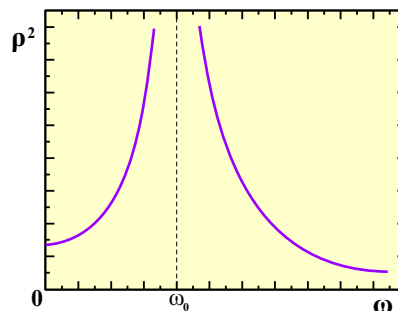
*
$$\rho^2 = \frac{1}{4m^2\omega_0^2[(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4]} \xrightarrow{\omega=0} \rho_{\text{αρχ.}}^2 = \frac{1}{4m^2\omega_0^2[\omega_0^2 + \gamma^2/4]}$$

$Q: \uparrow \Rightarrow \gamma: \downarrow \Rightarrow \rho_{\text{αρχ.}}^2: \uparrow$ $\dots \gamma \ll \omega_0 \Rightarrow \rho_{\text{αρχ.}}^2 \approx \frac{1}{4m^2\omega_0^4} \approx \text{σταθ.}$

➔ Στην ιδανική - ιδεατή περίπτωση όπου δεν υπάρχουν τριβές, έχουμε $\gamma=0$ και:

$$\rho^2 = \frac{1}{4m^2\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2} \implies \omega \rightarrow \omega_0 \Rightarrow \rho^2 \rightarrow \infty$$

& $\tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0^\circ$ και $\theta = -180^\circ$



➤ Για τις επόμενες γραφικές παραστάσεις έχουμε:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\rho_{\max}^2 = \frac{1}{m^2\omega_0^2\gamma^2} \Rightarrow \rho_{\max}^2 = \frac{Q^2}{m^2\omega_0^4}$$

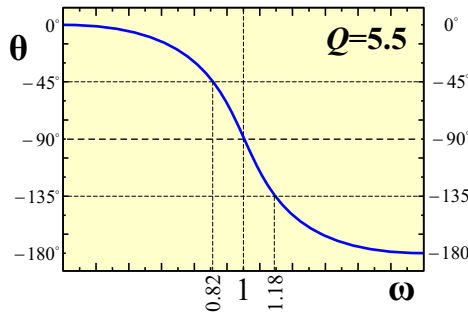
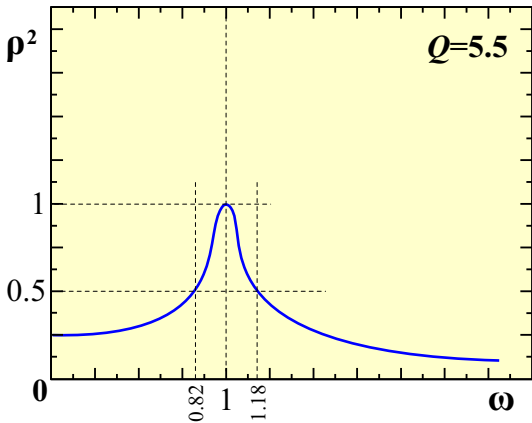
$$\omega_s = \omega_0 - \Delta\omega$$

$$\omega_b = \omega_0 + \Delta\omega$$

"s": small | η μικρή και η μεγάλη συχνότητα
"b": big | εκατέωθεν της ω_0 ($\Delta\omega = \omega_b - \omega_s$)

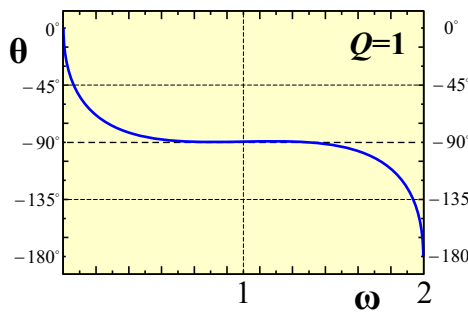
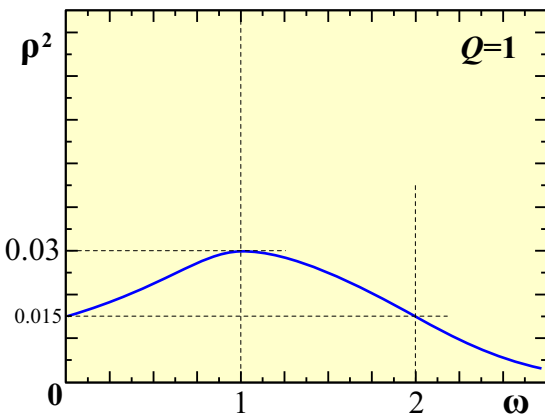


$\triangleright Q_0=5.5 \quad \Delta\omega_0 = \frac{\omega_0}{5.5} \Rightarrow \Delta\omega_0 = 0.18\omega_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_s^{(0)} = \omega_0 - 0.18\omega_0 = 0.82\omega_0 \\ \omega_b^{(0)} = \omega_0 + 0.18\omega_0 = 1.18\omega_0 \end{array} \right. / \quad \rho_{\max(0)}^2 = \frac{5.5^2}{1^2\omega_0^4} = \frac{30.25}{\omega_0^4}$

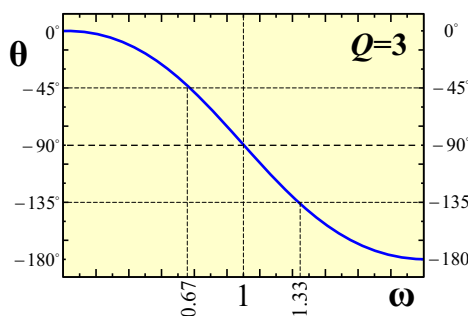
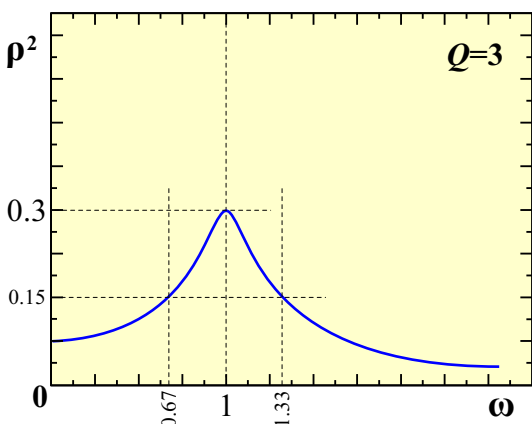


Θα παρουσιάσω όλα τα διαγράμματα με άξονες σε κανονικοποιημένες μονάδες, ώστε να υπάρχει σύγκριση. Οι μονάδες θα είναι: για τον οριζόντιο άξονα: ω_0 για τον κατακόρυφο άξονα: $\frac{30.25}{\omega_0^4}$ ίση με την τιμή του ρ_{\max}^2 για $Q=5.5$

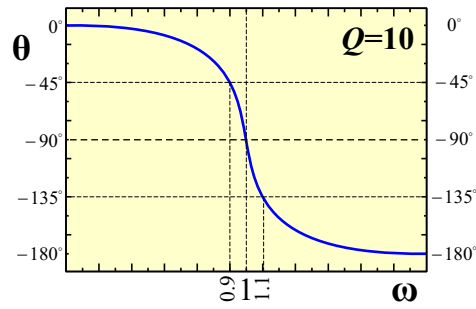
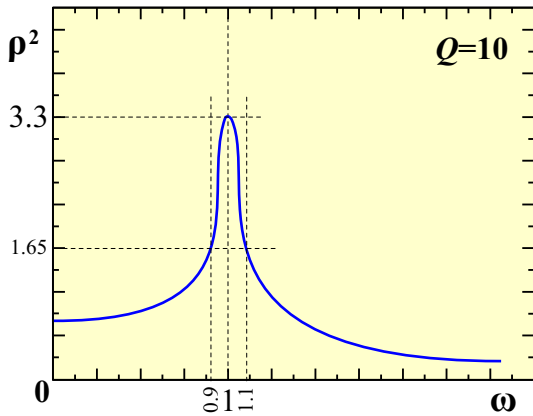
$\triangleright Q_1=1 \quad \Delta\omega_1 = \frac{\omega_0}{1} \Rightarrow \Delta\omega_1 = \omega_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_s^{(1)} = \omega_0 - \omega_0 = 0 \\ \omega_b^{(1)} = \omega_0 + \omega_0 = 2\omega_0 \end{array} \right. / \quad \left. \begin{array}{l} \rho_{\max(1)}^2 = \frac{Q_1^2}{m^2\omega_0^4} \\ \rho_{\max(0)}^2 = \frac{Q_0^2}{m^2\omega_0^4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\rho_{\max(1)}^2}{\rho_{\max(0)}^2} = \frac{Q_1^2}{Q_0^2} = \frac{1}{5.5^2} \Rightarrow \Rightarrow \rho_{\max(1)}^2 = 0.03\rho_{\max(0)}^2$



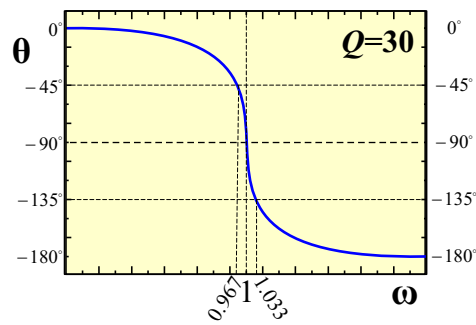
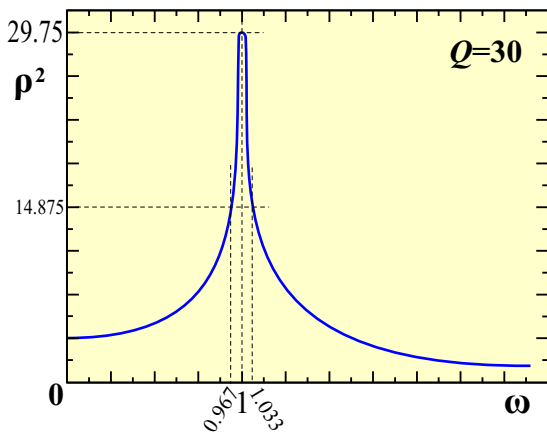
$\triangleright Q_2=3 \quad \Delta\omega_2 = \frac{\omega_0}{3} \Rightarrow \Delta\omega_2 = 0.33\omega_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_s^{(2)} = \omega_0 - 0.33\omega_0 = 0.67\omega_0 \\ \omega_b^{(2)} = \omega_0 + 0.33\omega_0 = 1.33\omega_0 \end{array} \right. / \quad \frac{\rho_{\max(2)}^2}{\rho_{\max(0)}^2} = \frac{Q_2^2}{Q_0^2} = \frac{3^2}{5.5^2} \Rightarrow \Rightarrow \rho_{\max(2)}^2 = 0.30\rho_{\max(0)}^2$



$\triangleright Q_3=10 \quad \Delta\omega_3 = \frac{\omega_0}{10} \Rightarrow \Delta\omega_3 = 0.1\omega_0 \quad \begin{cases} \omega_s^{(3)} = \omega_0 - 0.1\omega_0 = 0.9\omega_0 \\ \omega_b^{(3)} = \omega_0 + 0.1\omega_0 = 1.1\omega_0 \end{cases} \quad \left/ \quad \begin{aligned} \frac{\rho_{\max(3)}^2}{\rho_{\max(0)}^2} &= \frac{Q_3^2}{Q_0^2} = \frac{10^2}{5.5^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho_{\max(3)}^2 = 3.30\rho_{\max(0)}^2 \end{aligned} \right.$

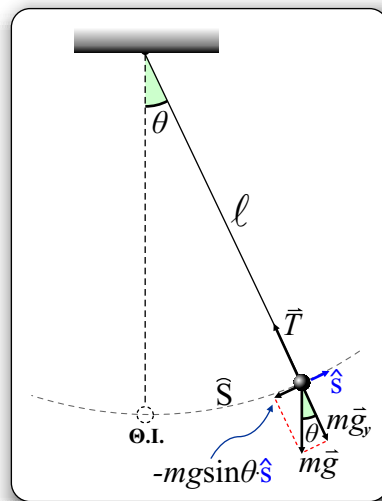


$\triangleright Q_4=30 \quad \Delta\omega_4 = \frac{\omega_0}{30} \Rightarrow \Delta\omega_4 = 0.033\omega_0 \quad \begin{cases} \omega_s^{(4)} = \omega_0 - 0.033\omega_0 = 0.967\omega_0 \\ \omega_b^{(4)} = \omega_0 + 0.033\omega_0 = 1.033\omega_0 \end{cases} \quad \left/ \quad \begin{aligned} \frac{\rho_{\max(4)}^2}{\rho_{\max(0)}^2} &= \frac{Q_4^2}{Q_0^2} = \frac{30^2}{5.5^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho_{\max(4)}^2 = 29.75\rho_{\max(0)}^2 \end{aligned} \right.$



ΘΕΜΑ 4 / b. / i

- » S : τόξο που προσδιορίζει τη θέση του σφαιριδίου. Μετρείται από τη Θ.Ι. (όπου $S=0$) μέχρι τη θέση του σφαιριδίου σε κάθε χρονική στιγμή.
- » \hat{s} : μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη φορά του τόξου S (στο σχήμα προς τα δεξιά και πάνω, εφαπτομενικά και αντιωράρια).



➡ Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση του σφαιριδίου μας δίνει:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -mg \sin\theta \cdot \hat{s} = m \frac{d^2 s}{dt^2} \cdot \hat{s} \xrightarrow{s=l\cdot\theta} -g \sin\theta = \frac{d^2(\ell \cdot \theta)}{dt^2} = \ell \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0 \xrightarrow{\sin\theta \approx \theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\omega_0^2 = g/\ell} \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0}$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΠΛΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΜΕ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ω_0

ΠΜΓ Προσέγγιση Μικρής Γωνίας
 θ : πολύ μικρή
 $\theta < 3^\circ - 5^\circ$
 $\sin\theta \approx \theta$
 $\cos\theta \approx 1$

» $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \left(\dots T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \right)$

» Με αρχικές συνθήκες $\theta = \theta_0$ και $d\theta/dt = 0$ (δηλαδή “εκτρέπουμε το σφαιρίδιο κατά θ_0 και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο”)

» Η γενική λύση της παραπάνω Διαφορικής Εξίσωσης: $\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ γίνεται:

• $\theta_0 = A \cos \omega_0 0 + B \sin \omega_0 0 \Rightarrow \theta_0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 \Rightarrow \boxed{A = \theta_0}$

• $\frac{d\theta}{dt} = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t \Rightarrow 0 = -A\omega_0 \sin \omega_0 0 + B\omega_0 \cos \omega_0 0 \Rightarrow 0 = -A\omega_0 \cdot 0 + B\omega_0 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{B = 0}$

...άρα: $\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0} \xrightarrow[t=\theta_0 \ \& \ \dot{\theta}=0]{t=0} \boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t}$

➤ **ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΗ x-ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ:**

» x : απομάκρυνση από τη Θ.Ι. (ημιχορδή) η οποία είναι ($x \approx S$) περίπου ίση με το τόξο S για πολύ μικρές γωνίες.

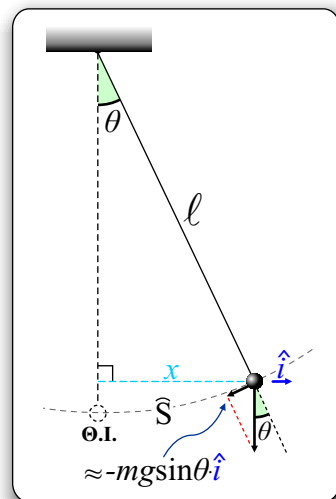
➡ Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -mg \sin\theta \cdot \hat{s} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \hat{s} \xrightarrow[\text{ορθ. τρίγωνο } x = \ell \cdot \theta]{\sin\theta = x/\ell} -g \frac{x}{\ell} = \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{\ell} x = 0 \xrightarrow{\omega_0^2 = g/\ell} \boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΠΛΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΜΕ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ω_0

Για πολύ μικρές γωνίες (δλδ για $\ell \gg S$ έχουμε $S \approx x$). Έτσι ενώ η πραγματική κίνηση γίνεται στην S -διεύθυνση, παίρνουμε προσεγγιστικά την επιτάχυνση: $\frac{d^2 S}{dt^2} \approx \frac{d^2 x}{dt^2}$



» Αντίστοιχα με πριν έχουμε:

$t = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \ \& \ \dot{\theta} = 0 \longrightarrow t = 0 \Rightarrow x = A \ \& \ \dot{x} = 0$

...όπου: $\sin\theta_0 = \frac{A}{\ell} \xrightarrow{\sin\theta_0 \approx \theta_0} \theta_0 = \frac{A}{\ell} \Rightarrow \boxed{A = \ell \cdot \theta_0}$

...και η λύση της ΔΕ είναι: $\boxed{x(t) = A \cos \omega_0 t}$

ΘΕΜΑ 4 / b. / ii

► Για την ταλάντωση του άκρου ανάρτησης “Ο” έχουμε:

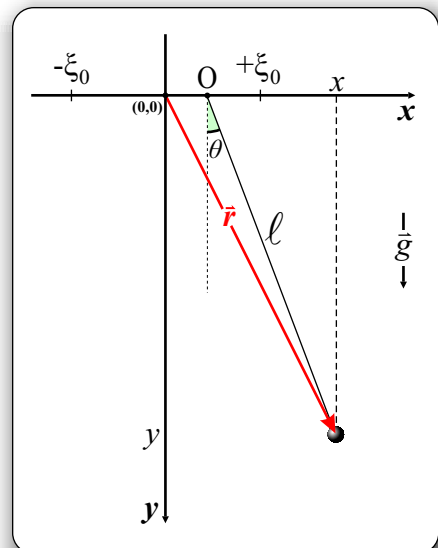
$$x_0 = \xi_0 \cos \omega t \quad \text{και σε διανυσματική μορφή: } \vec{x}_0 = \xi_0 \cos \omega t \cdot \hat{i}$$

► Το διάνυσμα θέσης για το σφαιρίδιο είναι:

$$\vec{r} = \vec{x}_0 + l \sin \theta \cdot \hat{i} + l \cos \theta \cdot \hat{j} \Rightarrow \vec{r} = \vec{x}_0 + l(\sin \theta \cdot \hat{i} + \cos \theta \cdot \hat{j})$$

► Η ταχύτητα του σφαιριδίου, ως παράγωγος της θέσης είναι:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{x}_0}{dt} + l(\cos \theta \cdot \theta' \cdot \hat{i} - \sin \theta \cdot \theta' \cdot \hat{j}) = \vec{x}'_0 + l \cdot \theta' (\cos \theta \cdot \hat{i} - \sin \theta \cdot \hat{j}) = \\ &= x'_0 \cdot \hat{i} + l \cdot \theta' (\cos \theta \cdot \hat{i} - \sin \theta \cdot \hat{j}) \end{aligned}$$



► Η κινητική ενέργεια του σφαιριδίου είναι:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [x'_0 \cdot \hat{i} + l \cdot \theta' (\cos \theta \cdot \hat{i} - \sin \theta \cdot \hat{j})]^2 = \\ &= \frac{1}{2} m [x_0'^2 \cdot \hat{i} \cdot \hat{i} + l^2 \cdot \theta'^2 (\cos \theta \cdot \hat{i} - \sin \theta \cdot \hat{j})^2 + 2x'_0 \cdot \hat{i} \cdot l \cdot \theta' (\cos \theta \cdot \hat{i} - \sin \theta \cdot \hat{j})] = \\ &= \frac{1}{2} m [x_0'^2 + l^2 \cdot \theta'^2 (\cos^2 \theta \cdot \hat{i} \cdot \hat{i} + \sin^2 \theta \cdot \hat{j} \cdot \hat{j} - 2 \cos \theta \cdot \hat{i} \cdot \sin \theta \cdot \hat{j}) + 2x'_0 \cdot \hat{i} \cdot l \cdot \theta' \cdot \cos \theta \cdot \hat{i} - 2x'_0 \cdot \hat{i} \cdot l \cdot \theta' \cdot \sin \theta \cdot \hat{j}] = \\ &= \frac{1}{2} m [x_0'^2 + l^2 \cdot \theta'^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2x'_0 \cdot l \cdot \theta' \cdot \cos \theta] \Rightarrow T = \frac{1}{2} m [x_0'^2 + l^2 \theta'^2 + 2x'_0 l \theta' \cos \theta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{i}^2 = 1 \\ \hat{j} \cdot \hat{j} &= \hat{j}^2 = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= 0 \end{aligned}$$

► Η δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου (ως προς y=0) είναι:

$$\begin{aligned} U &= -m\vec{g} \cdot \vec{r} = -mg \cdot \hat{j} \cdot [x_0 \cdot \hat{i} + l(\sin \theta \cdot \hat{i} + \cos \theta \cdot \hat{j})] = -mg \cdot \hat{j} \cdot x_0 \cdot \hat{i} - mg \cdot \hat{j} \cdot l \sin \theta \cdot \hat{i} - mg \cdot \hat{j} \cdot l \cos \theta \cdot \hat{j} \Rightarrow \\ &\Rightarrow U = -mgl \cos \theta \end{aligned}$$

► Η συνάρτηση **Lagrange** του συστήματος είναι: $L = T - U \Rightarrow L = \frac{1}{2} m [x_0'^2 + l^2 \theta'^2 + 2x'_0 l \theta' \cos \theta] + mgl \cos \theta$

► Η εξίσωση **Lagrange** για την κίνηση του σφαιριδίου είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m l^2 2\theta' + \frac{1}{2} m 2x'_0 l \cos \theta \right) - \left[\frac{1}{2} m 2x'_0 l \theta' (-\sin \theta) + mgl (-\sin \theta) \right] = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (l^2 \theta' + x'_0 l \cos \theta) + [x'_0 l \theta' + gl] \sin \theta &= 0 \Rightarrow l^2 \theta'' + x'_0 l \cos \theta + x'_0 l (-\sin \theta) \theta' + x'_0 l \theta' \sin \theta + gl \sin \theta = 0 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{+l^2} \theta'' + \frac{x_0''}{l} \cos \theta + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \xrightarrow{\substack{\text{ΠΜΓ} \\ \sin \theta \approx \theta \ \& \ \cos \theta \approx 1}} \theta'' + \frac{x_0''}{l} + \frac{g}{l} \theta = 0 \Rightarrow \theta'' + \frac{g}{l} \theta = -\frac{x_0''}{l} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\omega_0^2 = g/l} \theta'' + \omega_0^2 \theta = -\frac{x_0''}{l} \xrightarrow{x_0'' = -\xi_0 \omega^2 \cos \omega t} \boxed{\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = \frac{\xi_0 \omega^2}{l} \cos \omega t}$$

**ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗΣ
ΑΡΜ. ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ
ΑΠΛΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ**

$$\begin{aligned} x_0 &= \xi_0 \cos \omega t \\ x_0' &= -\xi_0 \omega \sin \omega t \\ x_0'' &= -\xi_0 \omega^2 \cos \omega t \end{aligned}$$

▶ Μετά τις αρχικές μεταβατικές καταστάσεις, το εκκρεμές θα εκτελέσει εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα ίση με την ω (του διεγέρτη) και εξίσωση γωνίας: $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$

▶ Βρίσκουμε το πλάτος θ_0 με εφαρμογή στην Δ.Ε.:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\theta_0 \cos \omega t) + \omega_0^2 \theta_0 \cos \omega t = \frac{\xi_0 \omega^2}{\ell} \cos \omega t \Rightarrow -\theta_0 \omega^2 \cos \omega t + \omega_0^2 \theta_0 \cos \omega t = \frac{\xi_0 \omega^2}{\ell} \cos \omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_0 (\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{\xi_0 \omega^2}{\ell} \Rightarrow \theta_0 = \frac{(\xi_0 / \ell) \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

▶ Τελική εξίσωση κίνησης: $\theta(t) = \frac{(\xi_0 / \ell) \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \right)$

▶ Η οριζόντια μετατόπιση του εκκρεμούς σε αδρανιακό σύστημα αναφοράς είναι:

$$\overbrace{x(t) = x_0(t) + S(t)}^{(*)} = x_0(t) + \ell \cdot \theta(t) = \xi_0 \cos \omega t + \ell \cdot \frac{(\xi_0 / \ell) \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t = \xi_0 \cos \omega t \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) =$$

$$= \xi_0 \cos \omega t \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow x(t) = \xi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

▶ Προφανώς σε μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το οποίο κινείται (ταλαντούμενο) πάνω στο σημείο ανάρτησης "Ο", δεν γίνεται αντιληπτή η ταλάντωση $x_0 = \xi_0 \cos \omega t$, επομένως η σχέση (*) γίνεται απλά:

$$x_{\mu\eta \text{ αδρ.}}(t) = S(t) = \ell \cdot \theta(t) = \ell \cdot \frac{(\xi_0 / \ell) \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \Rightarrow x_{\mu\eta \text{ αδρ.}}(t) = \xi_0 \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

ΘΕΜΑ 4 / b. / iii

▶ Από την προηγούμενη εξίσωση: $x(t) = \xi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$ έχουμε το πλάτος της ταλάντωσης: $A' = \xi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$

$$\omega < \omega_0$$

▶ και τότε η $x(t) \sim \cos \omega t$ δεν παρουσιάζει διαφορά φάσης ($\Delta\phi=0$) με την $x_0(t) \sim \cos \omega t$

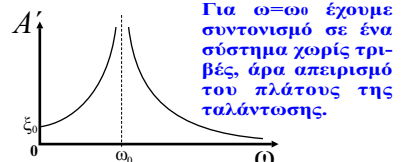
▶ Όταν όμως $\omega > \omega_0$ τότε:

$$x(t) = \xi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t = -\xi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t = \xi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} (-\cos \omega t) \Rightarrow x(t) = \xi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega t + \pi)$$

βλέπουμε ότι το πλάτος γίνεται: $A' = \xi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$ και η ταλάντωσή μας $x(t) \sim \cos(\omega t + \pi)$ παρουσιάζει διαφορά φάσης π ($\Delta\phi = \pi \text{ rad}$) με την $x_0(t) \sim \cos \omega t$

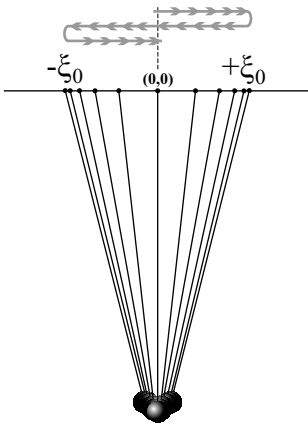
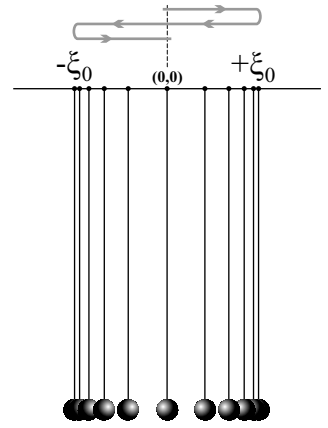
$$\omega > \omega_0$$

$$A' = \xi_0 \frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \begin{cases} x(t) \sim \cos \omega t / x_0(t) \sim \cos \omega t \longrightarrow \Delta\phi = 0 \\ x(t) \sim \cos(\omega t + \pi) / x_0(t) \sim \cos \omega t \longrightarrow \Delta\phi = \pi \text{ rad} \end{cases}$$



ΘΕΜΑ 4 / b. / iv

A) όταν η $\omega \ll \omega_0$, όταν δηλαδή $\omega \rightarrow 0$ τότε το εκκρεμές ταλαντώνεται ελάχιστα. Στην πραγματικότητα η ταλάντωση του εκκρεμούς είναι αποκλιστικά η ταλάντωση του άκρου “Ο”, αφού η αδράνεια του σφαιριδίου του δεν “προλαβαίνει” να παίξει ρόλο. Φαναστείτε ένα σημείο “Ο” να κινείται πολύ αργά πέρα-δώθε, τόσο αργά ώστε το νήμα να παραμένει συνεχώς κατακόρυφο. Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος της ταλάντωσης του σφαιριδίου είναι ίδιο με το πλάτος ξ_0 (σημείο $(0, \xi_0)$ στο διάγραμμα $A'-\omega$ της προηγούμενης σελίδας) και η συχνότητα του σφαιριδίου είναι πάρα πολύ μικρή. Όμως μικρή συχνότητα σημαίνει μεγάλη περίοδος και ισοδύναμα ($T' = 2\pi \sqrt{\ell' / g}$) σημαίνει μεγάλο μήκος ℓ' . Φυσικά το μήκος δεν μεταβάλλεται. Η κίνηση όμως είναι τέτοια που μπορούμε να την προσομοιώσουμε με μια άλλη με μεγαλύτερο μήκος.



B) αντίστροφη σκέψη θα ακολουθήσουμε στην περίπτωση της πολύ μεγάλης συχνότητας του “Ο”. Όταν λοιπόν $\omega \gg \omega_0$ ή με άλλα λόγια όταν $\omega \rightarrow \infty$, τότε το σφαιρίδιο του εκκρεμούς λόγω αδράνειας δεν μπορεί να ακολουθήσει την ταλάντωση του άλλου άκρου του νήματος. Πριν προλάβει να πάει δεξιά (λόγω δεξιάς κίνησης του “Ο”) το “Ο” έχει κινηθεί προς τ’ αριστερά. Και το ανάποδο... κ.ο.κ. Έτσι το σφαιρίδιο παραμένει πρακτικά ακίνητο ή απλά κάνει πολύ μικρές (σε πλάτος) ταλαντώσεις με αυτήν τη μεγάλη συχνότητα. Μεγάλη συχνότητα σημαίνει μικρή περίοδος και η μικρή περίοδος αντιστοιχεί σε ένα “φανταστικό” μικρότερο μήκος εκκρεμούς.

ΤΕΛΟΣ