Παράδοση 31/5/2013

1ο. Θέμα Μόρια 25

a. Ένας κυλινδρικός αγωγός ακτίνας r_0 διαρέεται από ρεύμα I ομοιόμορφα κατανεμημένο στη διατομή του. Θεωρώντας ότι ο αγωγός είναι παράλληλος προς τον άξονα z, δείξτε ότι ένα διανυσματικό δυναμικό της μορφής $\vec{A}$=K $(x^2+y^2)\hat{z}$ όπου K σταθερά, περιγράφει το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ για όλα τα σημεία στο εσωτερικό του αγωγού. Ποια είναι η τιμή της σταθεράς K; (Θεωρείστε γνωστό στροβιλισμό σε κυλινδρικές συντεταγμένες) (5)

b. Κυκλικός αγώγιμος δακτύλιος ακτίνας r_0 και αντίστασης R βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$, με το επίπεδο του κάθετο στο πεδίο. Τη χρονική στιγμή t=0 η ακτίνα του δακτυλίου αρχίζει να διαστέλλεται με ρυθμό u $=\frac{dr}{dt}=$ σταθ. (διατομή του αγωγού παραμένει σταθερή) μέχρι κάποια χρονική στιγμή t=τ > 0, οπότε και σταματά η διαστολή της.

   i. Βρείτε το επαγόμενο ρεύμα (μέτρο και φορά) στο δακτύλιο σαν συνάρτηση του χρόνου, κατά την διάρκεια της διαστολής του δακτυλίου. (5)

   ii. Ποια είναι η ενέργεια που χάνεται υπό μορφή θερμότητας κατά την διάρκεια της συστολής. (5)

c. Κυκλικός αγώγιμος δακτύλιος ακτίνας α κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$=u$\hat{x}$ προς τα θετικά x. Το επίπεδο του δακτυλίου διατηρείται κάθετο στον άξονα των x. Όταν t = 0, ο δακτύλιος βρίσκεται στο επίπεδο x = 0. Στο χώρο υπάρχει μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$=C$x^2\hat{x}$, όπου C είναι θετική σταθερά.

   i. Να υπολογιστεί η επαγόμενη στον δακτύλιο ΗΕΔ ως συνάρτηση του χρόνου. (2)

   ii. Αν η ωμική αντίσταση του δακτυλίου είναι R, να υπολογιστεί η απώλεια ενέργειας στον δακτύλιο κατά το χρονικό διάστημα t = 0 έως T. (2)

   iii. Είναι δυνατό να υπάρξει ένα τέτοιο μαγνητικό πεδίο στη φύση; (1)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(a) Η πυκνότητα του ρεύματος είναι: J=$\frac{I}{\pi r_0^2}\hat{z}$

Από το νόμο του Ampere, στο εσωτερικό του αγωγού ισχύει: 2πr$B_{εσωτερικό}$=$\mu_0 I_{εσωτερικό}$

όπου: $I_{εσωτερικό}$=Jπr^2=$\frac{I}{\pi r_0^2}$πr^2=I$\frac{r^2}{r_0^2}$

Άρα το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό είναι: $B_{εσωτερικό}=\frac{\mu_0 I_{εσωτερικό}}{2\pi r} \Rightarrow B_{εσωτερικό}=\frac{\mu_0 I r}{2\pi r_0^2}$

$\Rightarrow \vec{B}=\frac{\mu_0 I r}{2\pi r_0^2}\hat{\varphi}$, φ είναι η αζιμουθιακή γωνία (κυλινδρικές συντεταγμένες).

Το διανυσματικό δυναμικό είναι της μορφής:$\vec{A}$=K $(x^2+y^2)\hat{z}$

και σε κυλινδρικές συντεταγμένες γίνεται: $\vec{A}$=K$r^2\hat{z}$. Διότι $r^2=x^2+y^2$.

Από τη σχέση: $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ έχουμε $\frac{\mu_0 Ir}{2\pi r_0^2}\widehat{\varphi} = \frac{k}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\widehat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & r^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{\mu_0 Ir}{2\pi r_0^2}\widehat{\varphi} = \frac{k}{r}(-r\,\widehat{\varphi})\,2r$.

και η σταθερά k είναι ίση με: $K = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0^2}$.

(b)

(i) Κατά την διάρκεια διαστολής του δακτυλίου η ακτίνα αυξάνεται σύμφωνα με τη σχέση:

$u = \frac{dr}{dt} \Rightarrow r = r_0 + ut$.

Η μεταβολή στη μαγνητική ροή που διαπερνά τον δακτύλιο είναι ίση με:

$d\Phi = B\pi(r^2 - r_0^2) = B\pi[(r_0+ut)^2 - r_0^2]$.

Η επαγώμενη ΗΕΔ ισούται με:

$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\pi(2r_0u + 2u^2t)$.

και το επαγόμενο ρεύμα είναι:

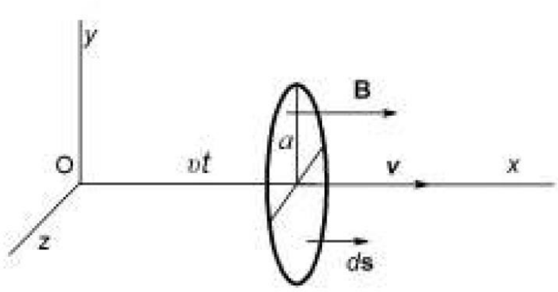
$i = \frac{E}{R} = -\frac{2\pi Bur}{R}$.

(ii) Το έργο που χάνεται υπό μορφή θερμότητας Joule κατά την διάρκεια της συστολής θα ι-σούται με :

$W = \int_0^{\tau} P dt = \int_0^{\tau} i^2 R dt = \frac{4\pi^2B^2u^2}{R}\int_0^{\tau}(r_0+ut)^2 dt = \frac{4\pi^2B^2u^2}{3R}[(r_0+u\tau)^3 - r_0^3]$.

(c) Η μαγνητική ροή μέσα από τον δακτύλιο σε μια χρονική στιγμή t είναι:

$$\Phi = \int_{\text{δακτύλιο}} \mathbf{B}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\text{δακτύλιο}} C x^2\,(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}})ds = C x^2 \quad \text{δακ}$$



Επειδή x=ut, είναι $\Phi = \pi C a^2 u^2 t^2$.

Η επαγόμενη ΗΕΔ είναι:

$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -2\pi C a^2 u^2 t$.

(β) Το ρεύμα στον δακτύλιο θα είναι: $I = \frac{E}{R} = -2\pi C a^2 u^2 t$

Ο ρυθμός απώλειας ενέργειας: $P = I^2R = 4\pi^2\frac{C^2a^2u^2}{R}t^2$

Η απώλεια ενέργειας στον δακτύλιο κατά το χρονικό διάστημα t = 0 έως T είναι:

$W = \int_0^T P dt = \int_0^T 4\pi^2\frac{C^2a^2u^2}{R}t^2 dt = \frac{4\pi^2C^2\alpha^4u^4}{3R}T^3$.

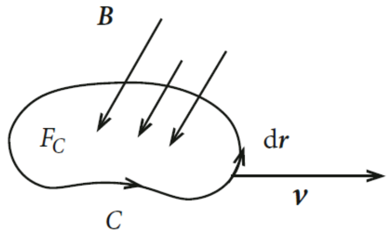
(γ) Για κάθε μαγνητικό πεδίο πρέπει να ισχύει η σχέση $\vec{\nabla}\bullet\vec{B}=0$.

Εδώ, είναι:

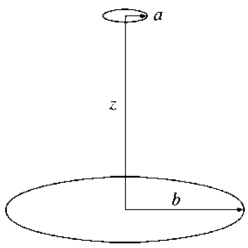
$\vec{\nabla}\bullet\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial Cx^2}{\partial x} + 0 + 0 = 2cx \neq 0$

και επομένως το πεδίο είναι αδύνατο να υπάρξει στη φύση.

2ο. Θέμα Μόρια 25



a. Στο διπλανό σχήμα παριστάνεται ένα κύκλωμα (υπαρκτό ή νοητό) το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (μέτρο και διεύθυνση) εντός χρονικά μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$. Αν C είναι η χωρική καμπύλη (όχι απαραίτητα επίπεδη) που περιορίζει το κύκλωμα και F_c είναι η επιφάνεια (όχι απαραίτητα επίπεδη και υπαρκτή) που καταλήγει στην εν λόγω καμπύλη, να αποδείξετε τον ισχυρισμό του βιβλίου σας (σελ. 17-2, 5η παράγραφος από κάτω), ότι ο κανόνας της "ροής" ισχύει αν έχουμε ταυτόχρονη χρονική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου και χωρική μεταβολή του κυκλώματος. Υπόδειξη: Πρώτα να αποδείξετε $\dfrac{d\vec{B}(t,\vec{r})}{dt}=\dfrac{\partial\vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t}+(\vec{\upsilon}\cdot\nabla)\vec{B}(t,\vec{r})$ και να λάβετε υπόψη σας την ταυτότητα $\nabla\times(\vec{B}\times\vec{A})=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}-(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})-\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})$. (10)



b. Δύο κυκλικοί βρόχοι ακτίνων a και b >> a απέχουν απόσταση z >> a, b και διαρρέονται αντίστοιχα από ρεύματα I_a και I_b. (Θεωρείστε γνωστό στροβιλισμό σε σφαιρικές συντεταγμένες)
   i. Να ευρεθεί η αμοιβαία επαγωγή m. (5)
   ii. Να προσδιοριστεί η δύναμη (μέτρο και διεύθυνση) που ασκείται μεταξύ των δύο βρόχων (5)

c. Να εξηγήσετε με σαφήνεια ποιά από τις δύο εκφράσεις 17.38 ή 17.48 περιγράφει πληρέστερα την ενέργεια δύο σωληνοειδών σε όλο το χώρο. (5)

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

(a)

Στη γενική περίπτωση η χρονική μεταβολή της ροής μπορεί να θεωρηθεί ότι οφείλεται στη άμεση χρονική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου B και στη χρονική μεταβολή της υπαρκτής (είτε νοητικής) επιφάνειας του βρόχου, δηλ.

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{F_C}\vec{B}\cdot d\vec{F}_C \qquad (0.1)$$

Η σχέση

$$\frac{d\vec{B}(t,\vec{r})}{dt}=\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t}+(\vec{\upsilon}\cdot\nabla)\vec{B}(t,\vec{r}) \qquad (0.2)$$

Αποδεικνύεται λαμβάνοντας υπόψη μας τον κανόνα διαδοχικής παραγώγιση και τον ορισμό του ανάδελτα.

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial}{\partial y}+\upsilon_y\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{\upsilon}\cdot\nabla) \qquad (0.3)$$

Επίσης από την δοθείσα ταυτότητα θέτοντας $\vec{A}=\vec{\upsilon}$ συνάγεται ότι

$$\nabla\times(\vec{B}\times\vec{\upsilon})=(\vec{\upsilon}\cdot\nabla)\vec{B}-\cancel{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{\upsilon}}+\cancel{\vec{B}(\nabla\cdot\vec{\upsilon})}-\vec{\upsilon}\overbrace{(\nabla\cdot\vec{B})}^{=0}=(\vec{\upsilon}\cdot\nabla)\vec{B} \tag{0.4}$$

Καθόσον η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ είναι σταθερή κατά μέτρο και διεύθυνση και η απόκλιση του $\vec{B}$ είναι πάντα μηδενική.

Συνεπώς με βάση την (0.2), την εξίσωση Maxwell $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ και το θεώρημα Stokes η (0.1) γράφεται

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt}&=\int_{F_C}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{F}_C+\int_{F_C}(\vec{\upsilon}\cdot\nabla)\vec{B}\cdot d\vec{F}_C=-\int_{F_C}(\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{F}_C+\int_{F_C}\overbrace{\nabla\times(\vec{B}\times\vec{\upsilon})}^{\lambda\acute{o}\gamma\omega\,(2.4)}\cdot d\vec{F}_C\\&\xrightarrow[\text{Stokes}]{\Theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha}-\oint_C\vec{E}\cdot dr+\oint_C(\vec{B}\times\vec{\upsilon})\cdot dr=-\oint_C\vec{E}\cdot dr-\oint_C(\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot dr\\&=-\oint_C(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot dr\end{aligned} \tag{0.5}$$

Αν δε λάβουμε υπόψη μας ότι η ΗΕΔ ορίζεται ως η δύναμη ανά μονάδα φορτίου (βλέπε τελευταία παράγραφο της ενότητας 17-1) από την (0.5) και τον γενικό ορισμό της συνολικής δύναμης που ασκείται σε ένα φορτίο παρουσία ηλεκτρικού και μαγνητικού φορτίου (σχέση 13-1)

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}) \tag{0.6}$$

Συνάγεται ότι

$$\text{ΗΕΔ}=-\frac{d\Phi_{\text{ολική}}}{dt} \tag{0.7}$$

Παρατήρηση 1:

Η εξίσωση (0.7) με τη βοήθεια της (0.5) μπορεί να γραφεί και υπό διαφορική μορφή (λαμβάνοντας υπόψη μας το θεώρημα Stokes)

$$\text{ΗΕΔ}=-\frac{d\Phi_{\text{ολική}}}{dt}=\oint_C\vec{E}'d\vec{r}=\oint_C(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot d\vec{r}\Rightarrow$$

$$\oiint_{F_C}(\nabla\times\vec{E}')\,d\vec{F}_C=\oiint_{F_C}\left[(\nabla\times\vec{E})+\nabla\times\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right]d\vec{F}_C=\oiint_{F_C}\left[(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})+\nabla\times\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right]d\vec{F}_C \tag{0.8}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{E}'=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\nabla\times\vec{\upsilon}\times\vec{B}}$$

Παρατήρηση 2:

Από την εξίσωση (0.8) συνάγεται ότι $\vec{E}'$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο όπως μετρείται σε ένα σύστημα S' το οποίο κινείται με σχετική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ως προς ένα σύστημα S, στο οποίο μετρείται μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Για παράδειγμα αν το $\vec{E}'$ επάγεται σε ένα κινούμενο αγωγό, $\vec{\upsilon}$ είναι η σχετική ταχύτητα του αγωγού ως το εργαστηριακό σύστημα και $\vec{B}$ είναι το πεδίο που μετρείται με ένα όργανο το οποίο είναι ακίνητο στο εργαστηριακό σύστημα. Παρατηρείστε ότι τα $\vec{E}'$ και $\vec{B}$ μετρούνται σε διαφορετικό σύστημα αναφοράς.

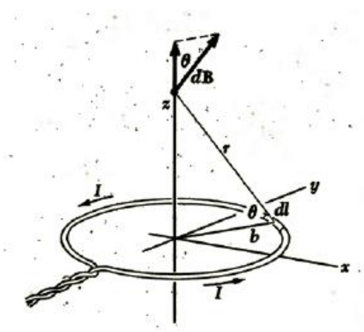
Παρατήρηση 3:

Προφανώς η παραπάνω θεώρηση ισχύει για μικρές ταχύτητες (όχι σχετικιστικές) καθόσον χρησιμοποιήθηκε η έννοια της δυνάμεως, η οποία είναι αμετάβλητη σε μετασχηματισμούς Γαλιλαίου. Αφού είναι γαλιλαϊκά αμετάβλητη η δύναμη, θα είναι και η ΗΕΔ (δύναμη ανά μονάδα φορτίου (αμετάβλητο και αυτό) και συνεπώς και συνολική μαγνητική ροή. Για τη περίπτωση σχετικιστικών ταχυτήτων προφανώς δεν ισχύουν τα ανωτέρω. Επίσης ο νόμος του Faraday (μεταβολή ροής) παραμένει Lorentz –αναλλοίωτος. Η περίπτωση σχετικιστικής δυναμικής κίνησης (πεδία επιταχυνόμενων φορτίων) είναι εξαιρετικά πολύπλοκη.

(b)

(i)

Βασιζόμενοι στην ιδιότητα ότι η αμοιβαία επαγωγή είναι ίδια, δηλαδή $\mathfrak{m}_{12} = \mathfrak{m}_{21} = \mathfrak{m}$, συμφέρει να την υπολογίσουμε θεωρώντας ότι προκαλείται από το μεγάλο βρόχο στον μικρό βρόχο, καθόσον σε αυτή τη περίπτωση έχουμε να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο περίπου στο κέντρο του κυκλικού βρόχου σε απόσταση z πάνω από το επίπεδό του.



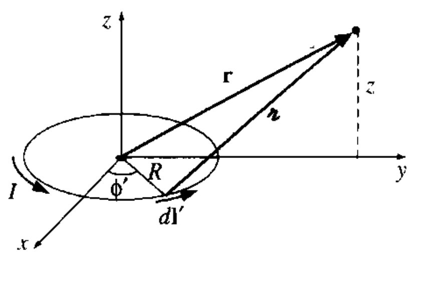
Το πεδίο σε ένα σημείο z πάνω από το επίπεδο του βρόχου θα έχει μόνο συνιστώσα παράλληλη με τον άξονα z (οι παράλληλες στο επίπεδο του μικρού βρόχου αλληλοαναιρούνται, όπως φαίνεται και στο σχήμα), και θα ισούται με:

$$
\begin{aligned}
dB_z &= \frac{1}{4\pi c^2\varepsilon_0}\frac{I_b}{r^2}\cos\theta dl = \frac{1}{4\pi c^2\varepsilon_0}\frac{I_b}{r^2}\frac{b}{r} \\
B_z &= \frac{b}{4\pi c^2\varepsilon_0}\frac{I_b}{r^3}\oint dl = \frac{2\pi b^2}{4\pi c^2\varepsilon_0}\frac{I_b}{r^3} = \frac{b^2 I_b}{2c^2\varepsilon_0(b^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 b^2 I_b}{2(b^2+z^2)^{3/2}}
\end{aligned}
\tag{0.9}
$$

Συνεπώς η μαγνητική ροή που διαπερνά το μικρό βρόχο θα ισούται με

$$
\begin{aligned}
\Phi_{ab} &= S_a B_b = \pi a^2\frac{b^2 I_b}{2c^2\varepsilon_0(b^2+z^2)^{3/2}} = \mathrm{M}_{ab} I_b \\
\mathrm{M}_{ab} &= \frac{\pi a^2 b^2}{2c^2\varepsilon_0(b^2+z^2)^{3/2}}
\end{aligned}
\tag{0.10}
$$

Παρατήρηση 4:



Προφανώς και μπορούμε να επιλέξουμε να υπολογίσουμε τη μαγνητική που διαπερνά το βρόχο b εξαιτίας του ρεύματος που διατρέχει τον βρόχο a. Όμως, όπως θα δούμε, οι υπολογισμοί είναι ποιό περίπλοκοι καθόσον τώρα το σημείο δεν βρίσκεται περίπου στο κέντρο του βρόχου. Στην γενική περίπτωση ο νόμος Biot Savart οδηγεί σε ελλειπτικά ολοκληρώματα και μόνο αριθμητική λύση είναι δυνατή. Μπορεί όμως κανείς να επεξεργαστεί το εν λόγω ολοκλήρωμα και αναλυτικά στην περίπτωση που το θεωρούμενο σημείο είναι πολύ κοντά στον κάθετο άξονα στο κέντρο των βρόχων και απέχει σημαντικά από τον βρόχο (για να ισχύει η προσέγγιση του διπόλου).

Από την παράγραφο 14-5 γνωρίζουμε ότι σε αυτή τη περίπτωση το μαγνητικό πεδίο ενός κλειστού βρόχου προσεγγίζεται με αυτό ενός ηλεκτρικού διπόλου. Επίσης από τη σχέση 14.34

που δίνει το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ βρίσκουμε, αν γράψουμε τον στροβιλισμό σε σφαιρικές συντεταγμένες, ότι

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{A} = \frac{1}{4\pi c^2 \varepsilon_0} \frac{\vec{\mu} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi c^2 \varepsilon_0} \frac{\mu \sin\theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\phi \sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$B_r = \frac{1}{4\pi c^2 \varepsilon_0} \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mu \sin\theta}{r^2}\sin\theta\right) = \frac{\mu}{4\pi c^2 \varepsilon_0 r^3} 2\cos\theta \tag{0.11}$$

$$B_\theta = \frac{1}{4\pi c^2 \varepsilon_0} \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\mu \sin\theta}{r^2}\right) = \frac{\mu}{4\pi c^2 \varepsilon_0 r^3}\sin\theta$$

$$B_\varphi = 0$$

Δηλ.

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi c^2 \varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\pi a^2 I_a}{4\pi c^2 \varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{0.12}$$

Μια ακόμη απλοποίηση των υπολογισμών μπορεί να προκύψει αν ολοκληρώσουμε σε μια ***σφαιρική*** επιφάνεια που έχει ως κέντρο της το κέντρο του μικρού βρόχου και περιορίζεται από τον μεγάλο βρόχο, $S = (r\sin\theta d\varphi)(rd\theta)$, καθόσον από μια τέτοια επιφάνεια θα διέρχεται η ίδια μαγνητική ροή όπως και από τον μεγάλο βρόχο. Έτσι θα έχουμε συνεισφορά μόνο από τον πρώτο όρο ο οποίος είναι κάθετος στην επιφάνεια (παράλληλος στο $\hat{r}$) καθόσον το διάνυσμα $\hat{\theta}$ στις σφαιρικές συντεταγμένες είναι εφαπτομενικό της επιφανείας. Συνεπώς η μαγνητική ροή με τη βοήθεια της σχέσεως (0.12) θα ισούται με

$$\begin{aligned}
&S = (r\sin\theta d\varphi)(rd\theta) \\
&\Phi_{ba} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{S}_b = \iint \vec{B}\cdot\vec{S} = \frac{\pi a^2 I_a}{4\pi c^2 \varepsilon_0 r^3}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\sin\theta=b/r} (2\cos\theta)(r^2\sin\theta d\theta) \\
&= \\
&= \frac{a^2 I_a \pi}{c^2 \varepsilon_0 r}\int_{\theta=0}^{\sin\theta=b/r}\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{\pi a^2 I_a}{c^2\varepsilon_0 r}\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\sin\theta=b/r} = \frac{\pi a^2 b^2 I_a}{2c^2\varepsilon_0(b^2+z^2)^{3/2}} \\
&= \mathrm{M}_{ba} I_a = \Phi_{ab}
\end{aligned} \tag{0.13}$$

και συνεπώς

$$\mathrm{M}_{ab} = \mathrm{M}_{ba}$$

Κάτι που αναμένετο. Όμως η απόδειξή του απαίτησε πάρα πολλές πράξεις και προσεγγίσεις. Ο λόγος που έγιναν και οι δύο οι υπολογισμοί είναι να δειχτεί πως η εφαρμογή γενικών νόμων και η κατάλληλη εφαρμογή των μπορεί να παρακάμψει σημαντικό βαθμό δυσκολίας.

(ii)

Η δύναμη που ασκείται μεταξύ των δύο βρόχων γενικά προκύπτει από τον συνδυασμό των σχέσεων (17.30) και (17.39).

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M} = -\frac{1}{4\pi c^2 \varepsilon_0} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r_{12}} \qquad (17.30) \\
&\vec{F} = I_1 I_2 \frac{d\mathrm{M}}{dx} \xrightarrow{\text{γενικά}} I_1 I_2 \nabla \mathrm{M} \qquad (17.39)...
\end{aligned}
\qquad (0.14)
$$

Η σχέση (17.30) αν και αποδείχτηκε για την περίπτωση των πηνίων και για την περίπτωση που τα ρεύματα παραμένουν σταθερά είναι γενική. Προφανώς και ισχύει για τους δύο ανεξάρτητους βρόχους (πηνία ενός βρόχου). Από τις σχέσεις (0.14) με τη βοήθεια της σχέσης (0.10) βρίσκουμε. (Το ίδιο ισχύει και αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (0.13))

$$
\begin{aligned}
F &= I_b I_a \frac{\partial \mathrm{M}_{ab}}{\partial z} = I_b I_a \cdot \frac{\pi a^2 b^2}{2c^2 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{(b^2+z^2)^{3/2}} = I_b I_a \cdot \frac{\pi a^2 b^2}{2c^2 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial (b^2+z^2)^{-3/2}}{\partial z} \\
&= -I_b I_a \cdot \frac{\pi a^2 b^2}{2c^2 \varepsilon_0} \cdot \frac{3z}{(b^2+z^2)^{5/2}}
\end{aligned}
\qquad (0.15)
$$

Δηλ, είναι ελκτική αν τα ρεύματα έχουν την ίδια διεύθυνση και απωστική αν τα ρεύματα έχουν αντίθετη διεύθυνση.

Παρατήρηση 5:

Αν φανταστούμε μια μικρή μετατόπιση των πηνίων που κατά τη διάρκειά της οποίας τα ρεύματα ρυθμίζονται έτσι ώστε να διατηρείται σταθερή η μαγνητική ροή. Τότε δεν αναπτύσσεται καμία ηλεκτρεγερτική δύναμη και οι πηγές δεν τροφοδοτούν το σύστημα με ενέργεια (εκτός από την αντιστάθμιση των απωλειών Joule τις οποίες παραβλέπουμε), τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη γενική σχέση της $-\vec{F} \cdot d\vec{r} = dU_{mag} \quad \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U_{mag}$, δηλ. η ασκούμενη δύναμη (μηχανικό έργο) οδηγεί σε μείωση της μαγνητικής ενέργειας του συστήματος. Παρατηρείστε ότι εδώ χρησιμοποιήθηκε η σχέση που χαρακτηρίστηκε ως λάθος στο βιβλίο σας (πρώτη σχέση στη σελίδα 17-13). Εκεί είχε χαρακτηριστεί ως λάθος γιατί δεν ελάμβανε υπόψη της την ενέργεια των πηγών, η οποία αντέστρεφε το πρόσημο στη μεταβολή της ενέργειας του συστήματος. Εδώ όμως οι πηγές δεν συνεισφέρουν. Συνεπώς εδώ είναι σωστή. Η σχέση (0.14) $I\mathrm{M} = \Phi$ δίδει μηδενική δύναμη καθόσον η ροή διατηρείται σταθερή.

(c)

Από την συζήτηση της ενότητας 17-8 προκύπτει ότι:

Η εκφραση

$$U = \frac{1}{2}\mathrm{L}_1 I_1^2 + \frac{1}{2}\mathrm{L}_2 I_2^2 + I_1 I_2 \mathrm{M} \quad ((17.38))$$

- Είναι προσεγγιστική.
  - Δεν περιλαμβάνει τη περίπτωση των ΗΜ- πεδίων, καθόσον αναφέρεται σε "στατικά" ρεύματα. Δηλ. σε ρεύματα με μεγάλο αριθμό φορτίων σε κίνηση που μπορεί να προσεγγισθεί με σταθερή ροή φορτίων ($\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$)., δηλ. τα φορτία εκτελούν κλειστές τροχιές (βρόχοι).
    - Τα κυκλώματα δεν θα πρέπει να περιέχουν πυκνωτές που φορτίζονται ή εκφορτίζονται)

- Ισχύει μόνο όταν μπορεί να υπολογισθεί ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής 𝔐 μέσω της $\mathrm{M} = -\frac{1}{4\pi c^2 \varepsilon_0} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r_{12}}$ (17.30), που σημαίνει ότι η απόσταση r_{12} είναι πολύ μεγαλύτερη από τη διάμετρο των αγωγών.
- Ομοίως, δεν μπορεί να υπολογισθούν, για τους ίδιους λόγους, και οι αυτεπεγωγές.
    - Η αυτεπαγωγή τείνει προς το άπειρο όταν η διάμετρος του αγωγού ενός πηνίου τείνει στο μηδέν.
    - Γενικά δεν λαμβάνει υπόψη της την κατανομή των ρευμάτων εντός του αγωγού του πηνίου. Η διάμετρος των αγωγών του πηνίου είναι πολύ σημαντική παράμετρος για να αγνοηθεί.
- Θεωρεί ότι η ενέργεια αποθηκεύεται στα ρεύματα.

Η έκφραση

$$U = \frac{c^2 \varepsilon_0}{2} \iiint_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \vec{\mathrm{B}} \cdot \vec{\mathrm{B}} dV \quad (17.48)$$

- Είναι πάντα ορθή.
- Θεωρεί ότι η ενέργεια αποθηκεύεται στο πεδίο.
- Ισχύει και για ταχέως μεταβαλλόμενα ΗΜ-πεδία
- Όμως υπάρχει μια φαινομενική αντίφαση. Τα μαγνητικά πεδία δεν παράγουν έργο. (κλειστές τροχιές, δύναμη κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας). Όμως η δημιουργία ενός μαγνητικού πεδίου εκεί που δεν υπήρχε, συνεπάγεται μεταβολή του μαγνητικού πεδίου η οποία όμως μεταβολή λόγω του νόμου του Faraday δημιουργεί κάπου μια ΗΕΔ η οποία παράγει έργο.

Παρατήρηση 6:

Γενικά μεταξύ των σχέσεων (17.38) και (17.48) ισχύουν οι ίδιες παρατηρήσεις που ισχύουν και μεταξύ των σχέσεων ($U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{\acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha \\ \zeta\varepsilon\acute{\upsilon}\gamma\eta}} \frac{q_1 q_2}{r_{ij}}$ (8.3) και $U = \frac{c^2 \varepsilon_0}{2} \iiint_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \vec{E} \cdot \vec{E} dV$ (8.30)) για τα ηλεκτροστατικά πεδία, όπου η (8.3) δίδει την ενέργεια που ηλεκτροστατικού πεδίου χωρίς να λαμβάνει υπόψη της την ενέργεια που απαιτείται για τη "δημιουργία" των επιμέρους φορτίων. Αντίθετα η (8.30) δίδει τη συνολική ενέργεια του ηλεκτροστατικού πεδίου και είναι πάντα σωστή..

3ο. Θέμα Μόρια 25

a. Για ένα επίπεδο ΗΜ κύμα κυματανύσματος $\vec{k}$ που διαδίδεται σε μη-μαγνητικό μέσο (μ=1) χωρίς την παρουσία φορτίων αποδείξτε ότι:

i. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου $\vec{H}$ είναι κάθετη στα $\vec{E}, \vec{D}$ και $\vec{k}$ καθώς και ότι τα $\vec{D}$ και $\vec{H}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. (5)

ii. Διερευνήστε αν το $\vec{E}$ θα είναι πάντα εγκάρσιο. (5)

b. Ας υποθέτουμε ότι σε κάποιο υλικό ισχύει η σχέση $\vec{j} = -\frac{nq^2}{m}\vec{A}$ ανάμεσα στην πυκνότητα ρεύματος $\vec{j} = nq\vec{\upsilon}$ και το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$, όπου q είναι οι κινούμενοι φορείς πυκνότητας n και μάζας m.

i. Από τις εξισώσεις του Maxwell αποδείξτε ότι ένα αργά μεταβαλλόμενο πεδίο υπακούει στην σχέση $\nabla^2\vec{B} = \frac{\vec{B}}{\lambda^2}$ και υπολογίστε την ποσότητα λ. (6).

ii. Λύστε αυτήν την εξίσωση για την περίπτωση μιας επίπεδης πλάκας άπειρης επιφάνειας από τέτοιο υλικό πάχους 2α, που βρίσκεται σε ένα σταθερό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο παράλληλο στις επιφάνειές της και εξηγήστε τι υποδηλώνει η ποσότητα λ (6).

iii. Εξηγήστε αναλυτικά σε τι οφείλεται η μείωση του μαγνητικού πεδίου στο υλικό. (3)

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

A) Ας ορίσουμε το ΗΜ κύμα ως $\vec{X}(\vec{r},t) = \vec{X}_o \exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right]$, όπου με $\vec{X}$ ορίζουμε κάποιο από τα μεγέθη του ΗΜ κύματος.

(i) Από τις εξισώσεις του Maxwell για την περίπτωση απουσίας φορτίων

$$div\vec{B} = 0,\ div\vec{D} = 0,\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \text{και}\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

θα προκύψουν κατά σειρά οι σχέσεις

$\vec{k}\cdot\vec{B} = \mu_o\vec{k}\cdot\vec{H} = 0$, δηλαδή το $\vec{H}$ είναι εγκάρσιο ως προς το κυματοδιάνυσμα $\vec{k}$.

Ομοίως από την $\vec{k}\cdot\vec{D} = 0$, συνάγεται ότι το $\vec{D}$ είναι εγκάρσιο ως προς το $\vec{k}$.

$\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B} = \mu_o\omega\vec{H}$ δηλαδή $\vec{H}\perp\vec{E}$

$\vec{k}\times\vec{H} = -\omega\vec{D}$ δηλαδή $\vec{H}\perp\vec{D}$

(ii) Από την $\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B} = \mu_o\omega\vec{H}$ προκύπτει ότι $\vec{k}\times\vec{k}\times\vec{E} = \mu_o\omega\vec{k}\times\vec{H}$

Όμως $\vec{k}\times\vec{H} = -\omega\vec{D}$ και λόγω της ταυτότητας $\vec{k}\times\vec{k}\times\vec{E} = \vec{k}\left(\vec{k}\cdot\vec{E}\right) - k^2\vec{E}$.

Επομένως $\vec{k}\left(\vec{k}\cdot\vec{E}\right) = k^2\vec{E} - \mu_o\omega^2 D$

Όταν $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_o\vec{E}$, τότε $k^2=\varepsilon\mu_o\varepsilon_o\omega^2=\varepsilon\dfrac{\omega^2}{c^2}=\dfrac{\omega^2}{\upsilon^2}$ που ισχύει και το $\vec{E}$ είναι εγκάρσιο.

Δεν θα είναι εγκάρσιο αν τα $\vec{E}$ και $\vec{D}$ δεν είναι παράλληλα. Δηλαδή σε ανισότροπο υλικό, όπου το ε παύει να είναι μονόμετρο μέγεθος, αλλά καθίσταται τανυστής $2^{ης}$ τάξεως .

B) Από την σχέση $\vec{j}=-\dfrac{nq^2}{m}\vec{A}$ λαμβάνοντας το curl προκύπτει ότι $\vec{\nabla}\times\vec{j}=-\dfrac{nq^2}{m}\vec{\nabla}\times\vec{A}=-\dfrac{nq^2}{m}\vec{B}$, δεδομένου ότι $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$.

Από την άλλη εξίσωση του Maxwell $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_o\vec{j}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ έχουμε ότι για αργά μεταβαλλόμενο πεδίο $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_o\vec{j}$. Λαμβάνοντας το curl αυτής της εξίσωσης έχουμε ότι $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_o\vec{\nabla}\times\vec{j}=-\mu_o\dfrac{nq^2}{m}\vec{B}=-\dfrac{1}{\lambda^2}\vec{B}$, όπου ορίστηκε $\lambda=\sqrt{m/\mu_o nq^2}$.

Από τις σχέσεις του βιβλίου γνωρίζουμε ότι $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\vec{\nabla}^2B=-\vec{\nabla}^2B$, αφού πάντα $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$. Επομένως, προκύπτει ότι $\nabla^2\vec{B}=\dfrac{\vec{B}}{\lambda^2}$.

(ii) Στην περίπτωση μιας άπειρης επίπεδης πλάκας με επιφάνεια κάθετη στον άξονα x, θα ισχύει η μονοδιάστατη περίπτωση και η εξίσωση θα λάβει την απλή μορφή $\dfrac{d^2B}{dx^2}=\dfrac{B}{\lambda^2}$, όπου το πεδίο θα είναι παράλληλο στον άξονα y.

Η λύση είναι της μορφής $B=A\exp\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)+C\exp\left(-\dfrac{x}{\lambda}\right)$. Για $x=\pm a$ θα πρέπει το πεδίο να ισούται με το εξωτερικό, επομένως θα ισχύει ότι $B_o=A\exp\left(\dfrac{\alpha}{\lambda}\right)+C\exp\left(-\dfrac{\alpha}{\lambda}\right)$ και $B_o=A\exp\left(-\dfrac{\alpha}{\lambda}\right)+C\exp\left(\dfrac{\alpha}{\lambda}\right)$. Οπότε $C=A=\dfrac{B_o}{\exp\left(\alpha/\lambda\right)+\exp\left(-\alpha/\lambda\right)}$ και η λύση θα είναι $B=B_o\dfrac{\cosh\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\dfrac{\alpha}{\lambda}\right)}$, που εκφράζει ένα εκθετικά φθίνον μαγνητικό πεδίο μέσα στο υλικό. Το λ θα αντιστοιχεί σε ένα βάθος διείσδυσης του πεδίου μέσα στο υλικό.

(iii) Από την εξίσωση $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_o\vec{j}$ θα προκύψει ότι $\mu_o\vec{j}=\hat{z}\dfrac{\partial B}{\partial x}$, αφού το πεδίο είναι παράλληλο στον άξονα y και εξαρτάται μόνο από το x. Επομένως θα δημιουργηθεί ένα επιφανειακό ρεύμα κατά τον άξονα z που θα είναι ίσο προς $j(x)=\dfrac{B_o}{\mu_o\lambda}\dfrac{\sinh\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\dfrac{\alpha}{\lambda}\right)}$. Αυτό ρεύμα θα θωρακίζει το υλικό από το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

4ο. Θέμα Μόρια 25

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύνολο από φορτία μάζας m και ηλεκτρικού φορτίου –e (e > 0), τα οποία είναι ελεύθερα να κινούνται (πλάσμα). Υπάρχουν *n* φορτία ανά μονάδα όγκου. Υποθέστε ότι η πυκνότητα είναι ομοιόμορφή και ότι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των φορτίων μπορούν να αγνοηθούν. Ηλεκτρομαγνητικά επίπεδα κύματα συχνότητας ω και κυματοδιανύσματος k προσπίπτουν στο πλάσμα.

i. Να βρείτε την αγωγιμότητα ως συνάρτηση της ω. (5)

ii. Να βρείτε την εξίσωση διασποράς, δηλ. την σχέση ανάμεσα στο k και την ω. (12)

iii. Πώς εξαρτάται ο δείκτης διάθλασης από την συχνότητα ω; Η γωνιακή ταχύτητα του πλάσματος ορίζεται από την σχέση 7.25. Τι συμβαίνει αν $\omega < \omega_p$; (3)

iv. Υπολογίστε την ταχύτητα φάσης. Πώς συγκρίνεται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό; Δημιουργείται πρόβλημα σε μια τέτοια περίπτωση; (5)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μπορούμε να γράψουμε το προσπίπτον επίπεδο κύμα στην μορφή $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$. Η εξίσωση κίνησης ενός ηλεκτρικού φορτίου στην θέση x είναι

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -e\boldsymbol{E}$$

την οποία ολοκληρώνουμε και έχουμε

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{e\boldsymbol{E}}{im\omega}$$

Η πυκνότητα ρεύματος λόγω της κίνησης των φορτίων είναι $\boldsymbol{j} = -ne\dot{\boldsymbol{r}}$. Η αγωγιμότητα μπορεί να βρεθεί από τον νόμο του Ωμ, $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$:

$$\sigma = \frac{-ne^2}{im\omega}.$$

β) Για φορτία στο κενό, οι εξισώσεις του Maxwell έχουν την μορφή:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}ne,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2}.$$

Παίρνοντας την στροφή της τρίτης εξίσωσης Maxwell και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$$

μαζί με την υπόθεση της σταθερής πυκνότητας *n* βρίσκουμε

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B})$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τελευταία εξίσωση του Maxwell και το νόμο του Ohm για να γράψουμε

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

Αν αντικαταστήσουμε στην $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$, παίρνουμε

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\sigma\omega}{\varepsilon_0 c^2}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για την αγωγιμότητα παίρνουμε

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

γ) Από το τελευταίο αποτέλεσμα είναι εύκολο να βρούμε το δείκτη διάθλασης

$$n \equiv \frac{ck}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Αν $\omega < \omega_p$ ο δείκτης διάθλασης είναι καθαρά φανταστικός και το κύμα δεν μπορεί να διαδοθεί στο πλάσμα.

δ) Στην προηγούμενη έκφραση, αν $\omega > \omega_p$, τότε ο δείκτης διάθλασης είναι πραγματικός και μικρότερος της μονάδας. Αυτό φαίνεται προβληματικό γιατί σημαίνει ότι η ταχύτητα φάσης είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Πράγματι

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}, \delta\eta\lambda.\, v_{ph} > c.$$

Θα εξετάσουμε κατά πόσο το τελευταίο αποτέλεσμα είναι αφύσικο. Η θεωρία της σχετικότητας του Einstein απαγορεύει να διαδίδεται η πληροφορία ταχύτερα από την ταχύτητα του φωτός γιατί τότε παραβιάζεται η αρχή της αιτιότητας (είναι τότε δυνατόν να βρεθεί ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο το γεγονός θα εμφανίζεται πριν από την αιτία). Όμως, ένα επίπεδο κύμα με μια μοναδική συχνότητα εκτείνεται σε όλο τον χώρο, και κατά συνέπεια δεν μεταφέρει πληροφορία, άλλη από το ότι υπάρχει. Ποια είναι λοιπόν η ταχύτητα που ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα μπορεί να μεταφέρει πληροφορία, μέσα από το πλάσμα; Ένας από τους πολλούς τρόπους είναι με σήματα Morse, δηλ. με παλμούς. Η ύπαρξη παλμών συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει μια μόνο συχνότητα αλλά ένα πλήθος ή ομάδα. Η ταχύτητα που διαδίδονται οι παλμοί είναι η ταχύτητα ομάδας που ορίζεται από $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Για την περίπτωσή μας έχουμε

$$2\omega\frac{d\omega}{dk} = 2kc^2,$$

$$\frac{\omega}{k}\frac{d\omega}{dk} = v_{ph}v_g = c^2$$

και τέλος

$$v_g = nc = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)c,$$

$$v_g < c.$$

Συνεπώς η πληροφορία διαδίδεται με ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός και η αρχή της αιτιότητας ισχύει.