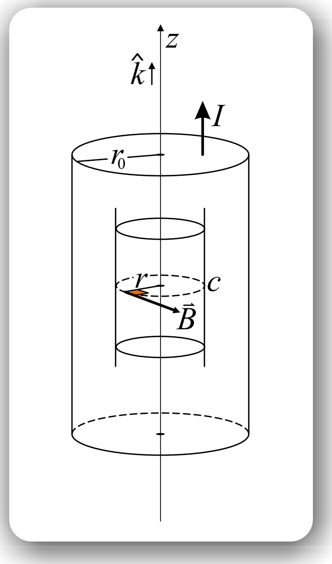
Ε.Α.Π.
ΚΦΕ51
2012-2013

Αναστάσιος Νέζης
Α.Μ.: 81717

6η Εργασία

ΘΕΜΑ 1 / a.



- Θεωρούμε έναν αμπεριανό βρόχο c με ακτίνα $r<r_0$ (εσωτερικά στον αγωγό).
- Το $\vec{B}$ λόγω συμμετρίας έχει σταθερό μέτρο και είναι παράλληλο στο $d\vec{\ell}$ της καμπύλης c (κατεύθυνση του μοναδιαίου $\hat{\varphi}$).
- Από τον νόμο του *Ampere* έχουμε:

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{encl} \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 I_{encl} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_{encl}}{2\pi r} \quad (1)$$

- Εφόσον το ρεύμα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο, η πυκνότητα J θα είναι σταθερή και ίση με: $J = I/\pi r_0^2$, άρα:

$$I_{encl} = J\pi r^2 = \frac{I}{\pi r_0^2}\pi r^2 \Rightarrow I_{encl} = I\frac{r^2}{r_0^2} \quad (2)$$

- (1)/(2):

$$B = \frac{\mu_0 I \frac{r^2}{r_0^2}}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{B_{\varepsilon\sigma\omega\tau.} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2} r} \quad \boxed{\vec{B}_{\varepsilon\sigma\omega\tau.} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2} r\hat{\phi}} \quad (3)$$

- Για το διανυσματικό δυναμικό που δίνεται έχουμε:

$$\vec{A} = \mathrm{K}(x^2+y^2)\hat{k} = \mathrm{K}r^2\hat{k} \longrightarrow \begin{cases} A_r = 0 \\ A_\phi = 0 \\ A_z = \mathrm{K}r^2 \end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\phi & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r0 & \mathrm{K}r^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\hat{r}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \mathrm{K}r^2 \end{vmatrix} - \frac{1}{r}r\hat{\phi}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \mathrm{K}r^2 \end{vmatrix} + \frac{1}{r}\hat{k}\cancelto{0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} =$$

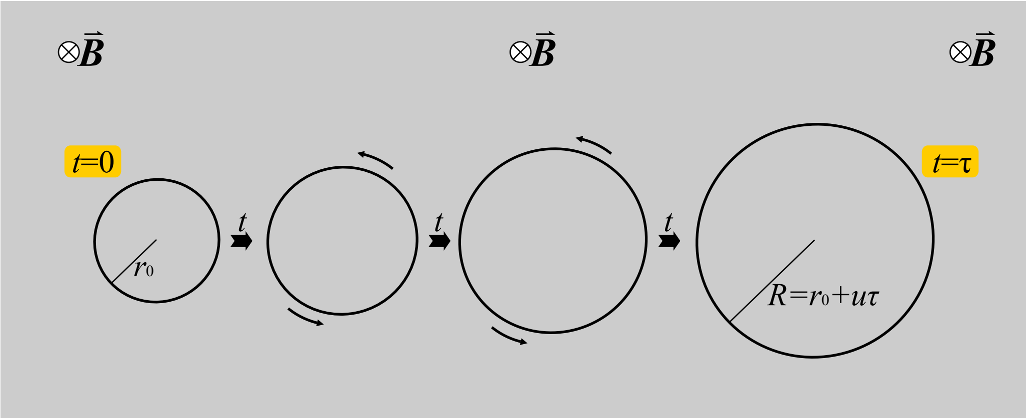
$$= \frac{1}{r}\hat{r}\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial \phi}(\mathrm{K}r^2)} - \hat{\phi}\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{K}r^2) \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\hat{\phi}\mathrm{K}2r} \quad (4)$$

- Από την εξίσωση ορισμού του διανυσματικού πεδίου και τις (3) και (4) έχουμε:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B} \xrightarrow{(3),(4)} \underbrace{\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2} r\hat{\phi} = -\hat{\phi}\mathrm{K}2r}_{} \Rightarrow \boxed{\mathrm{K} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0^2}}$$

Η οποία αποδεικνύει ότι το δεδομένο Α περιγράφει το εσωτερικό μαγνητικό πεδίο αρκεί...

ΘΕΜΑ 1 /b./i



Από το νόμο του *Faraday* έχουμε: $\varepsilon = -\dfrac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -B\dfrac{d}{dt}\int_S dS = -B\dfrac{d(\pi r^2)}{dt} = -B\pi\, 2r\dfrac{dr}{dt} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = -2\pi B r u}$

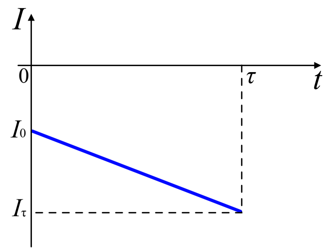
Και από το νόμο του *Ohm*: $I = \dfrac{\varepsilon}{R} \Rightarrow \boxed{I = -\dfrac{2\pi B r u}{R}}$ (1)

Για την ακτίνα του δακτυλίου: $u = \dfrac{dr}{dt} \Rightarrow dr = u dt \Rightarrow \int_{r_0}^{r} dr = u\int_0^t dt \Rightarrow r - r_0 = u(t-0) \Rightarrow \boxed{r = r_0 + ut}$ (2)

---

(1)/(2): $\boxed{I = -\dfrac{2\pi B u}{R}(r_0 + ut)}$ (3)

Το "-" οφείλεται στον κανόνα του *Lenz*.



$I_0 = -\dfrac{2\pi B u}{R} r_0$

$I_\tau = -\dfrac{2\pi B u}{R}(r_0 + u\tau)$

Εφόσον ο δακτύλιος "μεγαλώνει", άρα αυξάνεται το εμβαδόν του, η μαγνητική ροή που διέρχεται από μέσα του (με σταθερό μαγνητικό πεδίο) αυξάνεται. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz το επαγωγικό ρεύμα θα πρέπει να έχει τέτοια φορά ώστε το αποτέλεσμά του (ένα δευτερεύον μαγνητικό πεδίο που θα οφείλεται στο ρεύμα αυτό: $B' = \mu_0 I_{επ.}/2r$) να αντιτίθεται στην αιτία που το προκάλεσε. Η αιτία είναι η αύξηση της μαγνητικής ροής και με ένα B' αντίρροπο του B μπορεί να δημιουργηθεί αυτή η "αντί-δραση". Πρέπει λοιπόν να έχουμε ένα B' ⊙ (αφού το B είναι ⊗) και επομένως (κανόνας δεξιού χεριού) το επαγωγικό ρεύμα θα έχει φορά: ↶.

ΘΕΜΑ 1 /b./ii

Θερμική Ισχύς: $P_\Theta = I^2 R \xrightarrow{(3)} P_\Theta = \dfrac{4\pi^2 B^2 u^2}{R}(r_0 + ut)^2$

Θερμότητα: $P_\Theta = \dfrac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = P_\Theta dt \Rightarrow \int_0^Q dQ = \int_0^\tau P_\Theta dt \Rightarrow$

$\Rightarrow Q = \dfrac{4\pi^2 B^2 u^2}{R}\int_0^\tau (r_0 + ut)^2 dt \Rightarrow \boxed{Q = \dfrac{4\pi^2 B^2 u}{3R}\left[(r_0 + u\tau)^3 - r_0^3\right]}$

Υπολογισμός ολοκληρώματος:

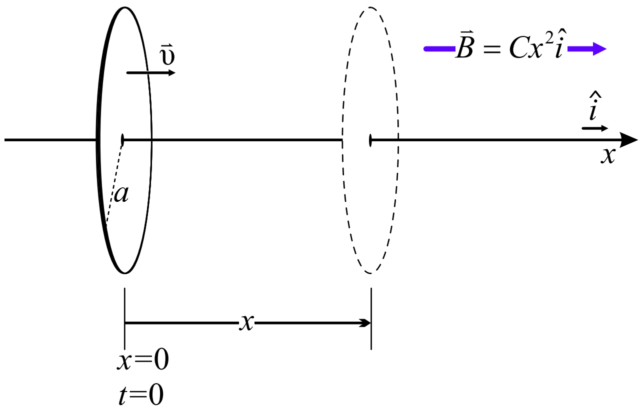
$\int_0^\tau (r_0 + ut)^2 dt =$

$= \dfrac{1}{u}\int_0^\tau (r_0 + ut)^2 d(r_0 + ut) =$

$= \dfrac{1}{u}\dfrac{(r_0 + ut)^3}{3}\Big|_0^\tau =$

$= \dfrac{1}{3u}\left[(r_0 + u\tau)^3 - r_0^3\right]$

ΘΕΜΑ 1 /c./i



Εφόσον $\vec{\upsilon} = u\hat{i}$ =σταθερή και για t=0, x=0 η θέση x του δακτυλίου θα είναι x=ut (ευθ. ομαλή κίνηση)

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{x}}{dt} \Rightarrow d\vec{x} = \vec{\upsilon}dt \Rightarrow \int_0^{\vec{x}} d\vec{x} = \int_0^t \vec{\upsilon}dt \Rightarrow \vec{x} - 0 = \int_0^t u\hat{i}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{x} = u\hat{i}\int_0^t dt \Rightarrow \vec{x} = u\hat{i}(t-0) \Rightarrow \boxed{\vec{x} = ut\hat{i}}$$

ν. Faraday: $$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = -\int \frac{\partial (Cx^2\hat{i})}{\partial t}\cdot d\vec{S} = -\int C\hat{i}\,\frac{\partial (ut)^2}{\partial t}\cdot d\vec{S} =$$

$$= -\int C\hat{i}u2t\cdot d\vec{S} = -Cu2t\int dS = -Cu2t\pi a^2 \Rightarrow \boxed{\varepsilon(t) = -2Cu\pi a^2 t}$$

ΘΕΜΑ 1 /c./ii

$$I(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R} = -\frac{2Cu\pi a^2 t}{R}$$

$$P_\Theta = I^2 R = \frac{4C^2u^2\pi^2a^4t^2}{R}$$

$$P_\Theta = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = P_\Theta dt \Rightarrow \int_0^Q dQ = \int_0^T P_\Theta dt \Rightarrow Q = \frac{4C^2u^2\pi^2a^4}{R}\int_0^T t^2dt = \frac{4C^2u^2\pi^2a^4}{R}\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^T \Rightarrow \boxed{Q = \frac{4C^2u^2\pi^2a^4T^3}{3R}}$$

ΘΕΜΑ 1 /c./iii

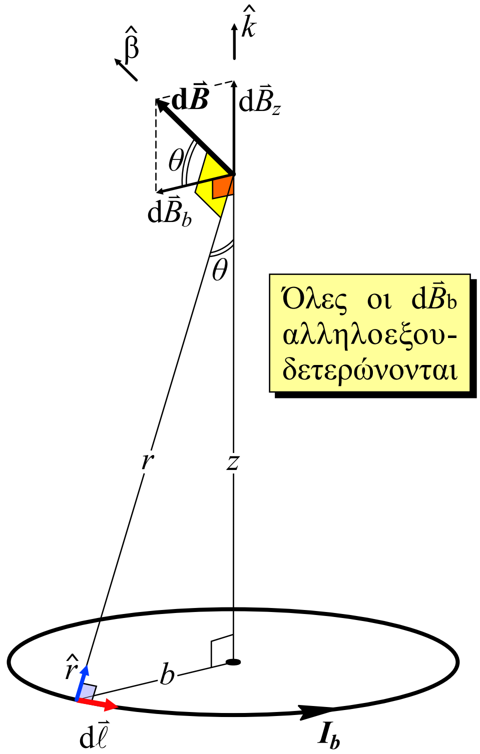
Για να υπάρχει ένα μαγνητικό πεδίο θα πρέπει να ισχύει η 2η εξίσωση του *Maxwell* (νόμος του *Gauss* για το μαγνητιό πεδίο):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow (\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k})\cdot(Cx^2\hat{i}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial (Cx^2)}{\partial x}\hat{i}\cdot\hat{i} = 0 \Rightarrow \boxed{2Cx = 0}$$

ΑΤΟΠΟ γιατί αν ισχυει τότε ή C=0 ή x=0. Και στις δύο όμως περιπτώσεις δεν θα υπήρχε το μαγνητικό πεδίο.

Άρα ή δεν υπάρχει το πεδίο (C=0 ή x=0) ή έχουμε $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} \neq 0$ που πάλι σημαίνει ότι δεν υπάρχει το πεδίο. Τελικα το πεδίο ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ. (...τζάμπα τόση δουλεία!)

ΘΕΜΑ 2 /b./i



Όλες οι $\mathrm{d}\vec{B}_b$ αλληλοεξουδετερώνονται

<u>Από τον νόμο των *Biot-Savart*</u>:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I_b}{4\pi}\frac{d\ell}{r^2}\hat{\beta}$$

$$\vec{B} = \int d\vec{B}_z = \int dB\sin\theta\hat{k} = \frac{\mu_0 I_b\hat{k}}{4\pi r^2}\int d\ell\sin\theta = \frac{\mu_0 I_b\hat{k}}{4\pi r^2}\int d\ell\frac{b}{r} = \frac{\mu_0 I_b\hat{k}b}{4\pi r^3}\int d\ell =$$

$$= \frac{\mu_0 I_b\hat{k}b}{4\pi r^3}2\pi b = \frac{\mu_0 I_b b^2}{2r^3}\hat{k} \longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I_b b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}}$$

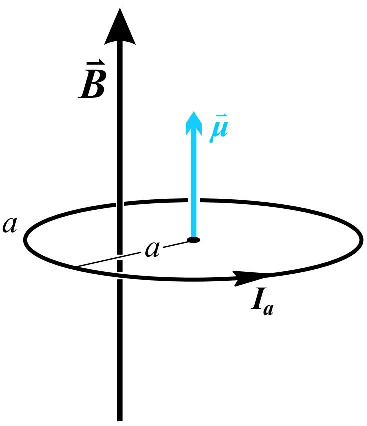
Η μαγνητική ροή που διέρχεται από τον βρόχο *a* λόγω του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο *b* είναι:

$$\Phi_a = B\pi a^2$$

Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής ορίζεται ως:

$$m = \frac{\Phi_a}{I_a} = \frac{B\pi a^2}{I_a} = \frac{\mu_0 I_b b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}\frac{\pi a^2}{I_a} \Rightarrow \boxed{m = \frac{\mu_0\pi a^2 b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}\frac{I_b}{I_a}}$$

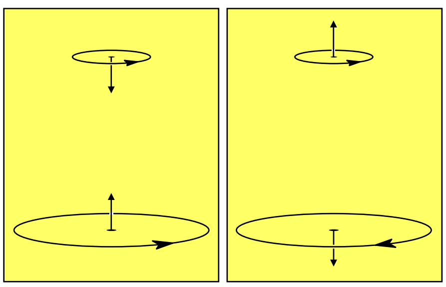
ΘΕΜΑ 2 /b./ii



- $\vec{\mu} = I_a S\hat{k} = I_a\pi a^2\hat{k}$: μαγνητική διπολική ροπή του βρόχου *a*
- $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I_b b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$: μαγνητικό πεδίο του βρόχου *b* στη θέση που βρίσκεται ο *a*
- $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{B})$: δύναμη που δέχεται η μαγνητική διπολική ροπή του *a*, από το μαγνητικό πεδίο του *b*

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{B}) = \vec{\nabla}(I_a\pi a^2\hat{k}\cdot\frac{\mu_0 I_b b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}) = \vec{\nabla}(\frac{\mu_0\pi I_a I_b b^2 a^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}) = \frac{1}{2}\mu_0\pi I_a I_b b^2 a^2\vec{\nabla}(b^2+z^2)^{-3/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0\pi I_a I_b b^2 a^2(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k})(b^2+z^2)^{-3/2} = \frac{1}{2}\mu_0\pi I_a I_b b^2 a^2(-\frac{3}{2})(b^2+z^2)^{-3/2-1}2z\hat{k} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{3\mu_0\pi I_a I_b b^2 a^2}{2(b^2+z^2)^{5/2}}z(-\hat{k})}$$

(***<u>Ελκτική</u>*** για τα ομόρροπα ρεύματα που υποθέσαμε)

...ομοίως η δύναμη βγαίνει ίδιου μέτρου και ***απωστική*** για αντίρροπα ρεύματα $\vec{F}' = \frac{3\mu_0\pi I_a I_b b^2 a^2}{2(b^2+z^2)^{5/2}}z(+\hat{k})$

ΤΕΛΟΣ