Παράδοση 5/3/2013

1ο. Θέμα Μόρια 25

a.

i. Υπολογίστε από τη σχέση 40.9 την κατανομή του μέτρου της ταχύτητας (3)

ii. Μια ποσότητα ιδανικού αερίου βρίσκεται σε θάλαμο θερμοκρασίας Τ. Μια μικρή τρύπα στο τοίχωμα του θαλάμου είναι αιτία για τη διαφυγή του αερίου στον περιβάλλοντα χώρο. Βρείτε τη πιο πιθανή και τη μέση ταχύτητα των μορίων που διαφεύγουν και συγκρίνατε με τις αντίστοιχες τιμές των μορίων μέσα στο θάλαμο. (7)

b. Οι τρεις χαμηλότερες ενεργειακά στάθμες ενός μορίου είναι $E_1=0$, $E_2=\varepsilon$ και $E_3=10\varepsilon$, όπου ε μια θετική ποσότητα.

i. Βρείτε τη θερμοκρασία κάτω από την οποία μόνο οι δύο πρώτες στάθμες είναι κατειλημμένες συναρτήσει του συνολικού αριθμού των μορίων N (5)

ii. Βρείτε τη μέση ενέργεια του μορίου συναρτήσει της θερμοκρασίας Τ. (5)

iii. Υπολογίστε την ειδική θερμότητα ανά γραμμομόριο για τις ακραίες περιπτώσεις της θερμοκρασίας. (5)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(a)

i. Η σχέση 40.9 είναι

$$f(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z =$$

$$\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_y^2}{2kT}}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_z^2}{2kT}} d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$$

Το στοιχείο «όγκου» $d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$ σε σφαιρικές συντεταγμένες γίνεται $\upsilon^2 d\upsilon\cdot d\phi\cdot\sin\theta d\theta$. Επομένως θα έχουμε

$$f(\upsilon)d\upsilon=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^2 d\upsilon\cdot d\phi\cdot\sin\theta d\theta=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^2 d\upsilon$$

ii. Η κατανομή των ταχυτήτων που διαφεύγουν δίνεται (βλ. σελ 40-6) από τη

$$f(\upsilon)d\upsilon\propto e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^2\cdot\upsilon\cdot d\upsilon$$

$$f(\upsilon)d\upsilon=Ae^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^3 d\upsilon\Rightarrow 1=\int_0^{\infty}Ae^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^3 d\upsilon\Rightarrow 1=A\frac{1!}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)^2}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{kT}\right)^2$$

Επομένως η πιο πιθανή ταχύτητα είναι εκείνη για την οποία η κατανομή έχει μέγιστο. Δηλαδή

$$\frac{df(\upsilon)}{d\upsilon}=0\Rightarrow 3\upsilon^2 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}-\upsilon^3 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}2\upsilon\frac{m}{2kT}=0\Rightarrow 3=\upsilon^2\frac{m}{kT}\Rightarrow \upsilon_m=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Η μέση ταχύτητα είναι

$$\left\langle \upsilon \right\rangle = \int_0^\infty \upsilon f(\upsilon) d\upsilon = A\int_0^\infty e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \upsilon^4 d\upsilon =$$

$$A\frac{3!!}{2^3\left(\frac{m}{2kT}\right)^2}\left(\frac{2kT\pi}{m}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{m}{kT}\right)^2 \frac{3}{1}\left(\frac{kT}{m}\right)^2 \left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2} \left(2\pi\right)^{1/2}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi kT}{2m}\right)^{1/2}$$

Οι αντίστοιχες ποσότητες μέσα στο θάλαμο είναι $\left\langle \upsilon \right\rangle_\theta = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}$ δηλαδή

$$\frac{\left\langle \upsilon \right\rangle}{\left\langle \upsilon \right\rangle_\theta} = \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{8}{\pi}}\right)^{1/2} = \frac{3}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8} \text{ και } \upsilon_{m\theta} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \text{ δηλαδή } \frac{\upsilon_m}{\upsilon_{m\theta}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

(b) Θεωρώντας ότι έχουμε N συνολικά μόρια με N_1 στη στάθμη E_1, N_2 στη στάθμη E_2 και N_3 στη στάθμη E_3 θα ισχύει προφανώς

$$N_1 + N_2 + N_3 = N$$

ενώ σύμφωνα με τη κατανομή Boltzmann θα έχουμε (σχ 40.11):

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

$$\frac{N_3}{N_1} = e^{-\frac{10\varepsilon}{kT}}$$

Επομένως $N_3 = \dfrac{N}{1 + e^{9\varepsilon/kT} + e^{10\varepsilon/kT}}$

i. Για να έχουμε $N_3 < 1$ (η στάθμη E_3 είναι κενή) θα πρέπει $T < T_c$ όπου η T_c προκύπτει από τη σχέση

$$\frac{N}{1 + e^{9\varepsilon/kT_c} + e^{10\varepsilon/kT_c}} = 1 \Rightarrow 1 + e^{9\varepsilon/kT_c} + e^{10\varepsilon/kT_c} = N \Rightarrow N = 1 + e^{10\varepsilon/kT_c}\left(e^{-\varepsilon/kT_c} + 1\right)$$

$$\Rightarrow N \approx e^{10\varepsilon/kT_c} \Rightarrow T_c \approx \frac{10\varepsilon}{k \ln N}$$

ii. Η μέση ενέργεια του μορίου είναι

$$\langle E\rangle = \frac{P_1E_1+P_2E_2+P_3E_3}{P_1+P_2+P_3} = \frac{E_1+\frac{P_2}{P_1}E_2+\frac{P_3}{P_1}E_3}{1+\frac{P_2}{P_1}+\frac{P_3}{P_1}} = \frac{0+e^{-\varepsilon/kT}\varepsilon+e^{-10\varepsilon/kT}10\varepsilon}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}}$$

iii. Η ειδική θερμότητα ανά mole είναι

$$C = N_A\frac{\partial E}{\partial T} = N_A\varepsilon\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{e^{-\varepsilon/kT}+10e^{-10\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}}\right) =$$

$$N_A\varepsilon\left(\begin{array}{l}\dfrac{\dfrac{\varepsilon}{kT^2}e^{-\varepsilon/kT}+\dfrac{100\varepsilon}{kT^2}e^{-10\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}} - \\ \dfrac{\left(e^{-\varepsilon/kT}+10e^{-10\varepsilon/kT}\right)\left(\dfrac{\varepsilon}{kT^2}e^{-\varepsilon/kT}+\dfrac{10\varepsilon}{kT^2}e^{-10\varepsilon/kT}\right)}{\left(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}\right)^2}\end{array}\right) =$$

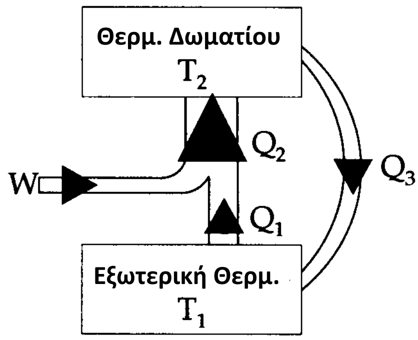
$$N_A\varepsilon\left(\begin{array}{l}\dfrac{\left(\dfrac{\varepsilon}{kT^2}e^{-\varepsilon/kT}+\dfrac{100\varepsilon}{kT^2}e^{-10\varepsilon/kT}\right)\left(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}\right)}{\left(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}\right)^2} - \\ \dfrac{\dfrac{\varepsilon}{kT^2}\left(e^{-\varepsilon/kT}+10e^{-10\varepsilon/kT}\right)\left(e^{-\varepsilon/kT}+10e^{-10\varepsilon/kT}\right)}{\left(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}\right)^2}\end{array}\right) =$$

$$N_A\varepsilon\left(\begin{array}{l}\dfrac{\dfrac{\varepsilon}{kT^2}\left(e^{-\varepsilon/kT}+e^{-2\varepsilon/kT}+e^{-11\varepsilon/kT}+100e^{-10\varepsilon/kT}+100e^{-11\varepsilon/kT}+100e^{-20\varepsilon/kT}\right)}{\left(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}\right)^2} \\ -\dfrac{\dfrac{\varepsilon^2}{kT^2}\left(e^{-2\varepsilon/kT}+10e^{-11\varepsilon/kT}+10e^{-11\varepsilon/kT}+100e^{-20\varepsilon/kT}\right)}{\left(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}\right)^2}\end{array}\right) =$$

$$\frac{N_A\varepsilon^2}{kT^2}\frac{e^{-\varepsilon/kT}+100e^{-10\varepsilon/kT}+81e^{-11\varepsilon/kT}}{\left(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}\right)^2}$$

Για $kT >> \varepsilon$ $C \approx \dfrac{N_A\varepsilon^2}{kT^2}\dfrac{182}{9} \propto \dfrac{1}{T^2}$ ενώ για $kT << \varepsilon$ $C \approx \dfrac{N_A\varepsilon^2}{kT^2}\dfrac{e^{-\varepsilon/kT}}{1}$

2ο. Θέμα   Μόρια 25



a. Η θερμοκρασία ενός δωματίου θέλουμε να διατηρείται σταθερή στους 21 ^{0}C όταν η εξωτερική θερμοκρασία είναι 0 ^{0}C. Αν ο βαθμός θερμομόνωσης του δωματίου εκφράζεται από έναν συντελεστή $\gamma = Q_3/(T_2 - T_1)$, όπου Q_3 ο ρυθμός απωλειών θερμότητας στο περιβάλλον να υπολογίσετε το κόστος θέρμανσης του δωματίου όταν το δωμάτιο θερμαίνεται με:

iv. Με ηλεκτρική θερμάστρα (απόδοση 100 %). (1)

v. Με μία αντλία θερμότητας της οποίας η αντιστρεπτή λειτουργία απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα (θεωρείστε ότι ε% του εξωτερικού έργου δεν προσφέρεται στη μηχανή). (5)

vi. Να δείξετε ότι για πλήρως μονωμένο δωμάτιο και οι δύο τρόποι είναι ισοδύναμοι, ενώ αν $\varepsilon \le T_1/T_2$ συμφέρει η θέρμανση με αντλία. (4)

b. Να δειχθεί ότι αν ρίξουμε απότομα (θεωρώντας πλήρως μη αντιστρεπτή διαδικασία) γάλα θερμοκρασίας T_1 σε καφέ θερμοκρασίας $T_2 > T_1$, η τελική θερμοκρασία ισορροπίας T_f^{irv} είναι μεγαλύτερη από την T_f^{rev} που προκύπτει θεωρώντας πλήρως αντιστρεπτή διαδικασία. Θεωρείστε ότι οι θερμοχωρητικότητες του καφέ $C_1(=m_1c_1)$ και του γάλατος $C_2(=m_2c_2)$ είναι θετικές και ανεξάρτητες της θερμοκρασίας. *Υπόδειξη: Αν* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ *τότε* $\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \ge \lambda_1 \ln(x_1) + \lambda_2 \ln(x_2) + \ldots + \lambda_n \ln(x_n)$ *(μερική μορφή της ανισότητας Jensen).* (8)

vii. Να υπολογίσετε αναλυτικά τις μεταβολές (επιμέρους και συνολική) της εντροπίας, της εσωτερικής ενέργειας και το μέγιστο μηχανικό έργο που μπορεί να εξαχθεί από το σύστημα για κάθε μία από τις δύο μεταβολές. Να δειχτεί ότι συνάρτηση της συνολικής μεταβολής της εντροπίας είναι θετική και αύξουσα. (4)

viii. Αν αντιστρέψουμε τις θερμοκρασίες, δηλ. $T_1 \leftrightarrows T_2$, (όχι όμως και τις ποσότητες) τι νομίζετε ότι θα συμβεί. Αιτιολογείστε την απάντησή σας με βάση την παραπάνω αναλυτική θεώρηση αλλά και από την αριθμητική εφαρμογή θεωρώντας $T_1 = 293{,}15$ K (20^{0}C), $T_2 = 353{,}15$ K (80 ^{0}C), C_1= 50 Kcal/T, C_1= 300 Kcal/T. (3)

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

(a)

(i)

Με βάση το σχήμα Q_1 ροή θερμότητας (ανά μονάδα χρόνου) απορροφιέται από το εξωτερικό περιβάλλον. Μαζί με την ισχύ W (έργο ανά μονάδα χρόνου) η αντλία θερμότητος είναι σε θέση να τροφοδοτεί το δωμάτιο με ροή θερμότητος Q_2.

Οι απώλειες θερμότητας του δωματίου εκφράζονται από το ποσό θερμότητας Q_3 και το οποίο είναι ανάλογο της διαφοράς θερμοκρασίας, δηλ.

$$Q_3 = \gamma(T_2 - T_1) \qquad T_2 > T_1 \tag{1}$$

Συνεπώς η απαιτούμενη ηλεκτρική ενέργεια, αφού έχουμε 100 % απόδοση, θα ισούται με

$$W^{el} = -Q_3 = \gamma(T_2 - T_1) \qquad T_2 > T_1 \tag{2}$$

(ii)

Θεωρώντας ότι τα βέλη υποδηλώνουν τη θετική διεύθυνση ενεργειακών ροών ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής, αναφορικά με την αντλία, δίδει:

$$W + Q_1 + Q_2 = 0 \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad Q_2 < 0 \quad \delta\eta\lambda.$$
$$|Q_2| = W + Q_1 \tag{3}$$

Προφανώς έχει παραλειφθεί η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας καθόσον έχουμε κυκλική λειτουργία (= επαναφορά στην αρχική κατάσταση.

Για να έχουμε αντιστρεπτή λειτουργία της αντλίας θα πρέπει να ισχύει (σχέση 44-7)

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad \Rightarrow Q_1 = -Q_2 \frac{T_1}{T_2} \tag{4}$$

Οπότε η (3) δίδει

$$W + Q_2(1 - \frac{T_1}{T_2}) = 0 \tag{5}$$

Από την (5) συνάγεται ότι αν η εξωτερική θερμοκρασία $T_1 < T_2$, τότε θα πρέπει να προσφέρεται έργο (θετικό W) στην αντλία, ενώ αν είναι ίσες δεν απαιτείται εξωτερικό έργο.

Στη σταθερή κατάσταση λειτουργίας η θερμική ροή Q_2 θα πρέπει να αντισταθμίζει τις θερμικές απώλειες ($Q_2 = -Q_3$) λόγω κακής θερμομόνωσης δηλ.

$$W = -Q_2(1 - \frac{T_1}{T_2}) = Q_3(1 - \frac{T_1}{T_2}) = \gamma(T_2 - T_1)(1 - \frac{T_1}{T_2}) \tag{6}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι απώλειες είναι ε, η προσφερόμενη ενέργεια W_{eff}^{p} στην αντλία θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη κατ' αυτό το ποσό, δηλ

$$W = (1 - \varepsilon)W_{eff}^{p} = \gamma(T_1 - T_2)(1 - \frac{T_1}{T_2})$$
$$W_{eff}^{p} = \frac{\gamma(T_1 - T_2)}{1 - \varepsilon}(1 - \frac{T_1}{T_2}) \tag{7}$$

Από τις (7) και (2) παίρνουμε

$$\frac{W_{eff}^{p}}{W^{el}} = \frac{1}{1 - \varepsilon}(1 - \frac{T_1}{T_2}) \tag{8}$$

Από την (8) συνάγεται ότι, κατ΄ αρχήν, αν η διαφορά των θερμοκρασιών είναι μικρή ($T_1 \cong T_2$) τότε $W_{eff}^{p} < W^{el}$, δηλ. συμφέρει η θέρμανση μέσω αντλίας. Η εξίσωση (8) δεν είναι και τόσο κατάλληλη για τέτοια σύγκριση, καθόσον για μικρή διαφορά θερμοκρασιών οι θερμικές απώλειες Q_3 γίνονται επίσης μικρές. Η εξοικονομούμενη ισχύς φαίνεται αν σχηματίσουμε τη διαφορά.

$$W^{el} - W_{eff}^{p} = \gamma(T_1 - T_2)\left[1 - \frac{1}{1 - \varepsilon}(1 - \frac{T_1}{T_2})\right] \tag{9}$$

(iii)

Από την (9) συνάγεται ότι για γ = 0, δεν παίζει ρόλο πως θερμαίνει κανείς καθόσον δεν απαιτείται επιπλέον θερμότητα όταν επιτευχθεί η απαιτούμενη θερμοκρασία.

Επίσης από την (8) συνάγεται ότι συμφέρει η θέρμανση με αντλία όταν,

$$\frac{W_{eff}^{p}}{W^{el}} = \frac{1}{1-\varepsilon}(1-\frac{T_1}{T_2}) \leq 1$$
$$(1-\frac{T_1}{T_2}) \leq 1-\varepsilon \qquad \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{T_1}{T_2} \qquad (10)$$

Με βάση τα δεδομένα T_1/T_2 = 273/294 = 0,93 βρίσκουμε ότι ακόμη και για απώλειες του θερμοπομπού έως ε = 93% η θέρμανση με θερμοπομπό είναι ενεργειακά προτιμότερη.!!

(b)

(ι)

Τα αναμειγνύουμε απότομα, δηλ έχουμε πλήρως ***Μη αντιστρεπτή*** διαδικασία. Αυτό σημαίνει ότι δεν ασκείται (=αντιστέκεται) καμία δύναμη στη μεταβολή του όγκου, δηλαδή

$$\Delta W = 0 \qquad (11)$$

και

$$\Delta Q_1 = C_1 dT_1$$
$$\Delta Q_2 = C_2 dT_2 \qquad (12)$$
$$\Delta Q_1 = -\Delta Q_2 \quad \Rightarrow \boxed{\Delta U = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0}$$

Έτσι για την τελική θερμοκρασία θα ισούται

$$\int_{T_1}^{T_f^{irv}} C_1 dT_1 = -\int_{T_2}^{T_f^{irv}} C_2 dT_2 \qquad \Rightarrow \boxed{T_f^{irv} = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}} \Rightarrow \boxed{T_1 < T_f^{irv} < T_2}_1 \qquad (13)$$
$$C_1(T_f^{irv} - T_1) = -C_2(T_f^{irv} - T_2)$$

Καθόσον ο αριθμητικός μέσος όρος δύο δεδομένων κείται πάντα μεταξύ των επιμέρους δεδομένων αλλά και.

$$T_f^{irv} = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{T_f^{irv}}{T_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_1(T_1/T_2)}{C_1 + C_2} \xrightarrow[C_1>0, C_2>0]{T_1/T_2>1} > 1 \qquad (14)$$
$$\frac{T_f^{irv}}{T_1} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} + \frac{C_2(T_2/T_1)}{C_1 + C_2} \xrightarrow[C_1>0, C_2>0]{T_2/T_1<1} < 1$$

(ii)

Τα αναμειγνύουμε σιγά-σιγά, δηλ έχουμε ***αντιστρεπτή διαδικασία***. Τότε

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$$
$$dS = \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0 \qquad (15)$$

Από την (15) προκύπτει αμέσως ότι

$$\int_{T_1}^{T_f^{rev}} \frac{C_1 dT}{T} + \int_{T_2}^{T_f^{rev}} \frac{C_2 dT}{T} = 0$$

$$C_1 \ln \frac{T_f^{rev}}{T_1} + C_2 \ln \frac{T_f^{rev}}{T_2} = 0 \qquad \Rightarrow \left(\frac{T_f^{rev}}{T_1}\right)^{C_1} \left(\frac{T_f^{rev}}{T_2}\right)^{C_2} = 1 \tag{16}$$

$$\boxed{T_f^{rev} = T_1^{\frac{C_1}{C_1+C_2}} T_2^{\frac{C2}{C_1+C_2}} = \sqrt[C_1+C_2]{T_1^{C_1} T_{21}^{C_2}}}$$

Δηλ. ισούται με τον γεωμετρικό μέσο όρο των θερμοκρασιών T_1 και T_2 σταθμισμένων με τις θερμοχωρητικότητες C_1 και C_2 . Από τις (16) και (14) συνάγεται ότι

$$T_f^{rev} = \sqrt[C_1+C_2]{T_1^{C_1} T_{21}^{C_2}} \qquad \Rightarrow$$

$$\ln T_f^{rev} = \frac{C_1 \ln T_1 + C_2 \ln T_2}{C_1 + C_2} \xrightarrow{\text{Υπόδειξη}} < \ln\left(\frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}\right) = \ln T_f^{irev} \tag{17}$$

$$\boxed{T_f^{rev} < T_f^{irev}}$$

Δηλ, η τελική θερμοκρασία στην μη αντιστρεπτή διαδικασία (= απότομη ανάμειξη) είναι πάντα μεγαλύτερη από την τελική θερμοκρασία στην αντιστρεπτή διαδικασία (αργή ανάμειξη).

(i)

Η συνολική μεταβολή της εντροπίας θα ισούται με το άθροισμα των μεταβολών των επιμέρους εντροπιών.

Για τη περίπτωση ***της πλήρως μη αντιστρεπτής μεταβολής*** οι μεταβολές των επιμέρους εντροπιών θα είναι

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \int \frac{\Delta Q_1}{T} = \int_{T_1}^{T_f^{irv}} \frac{C_1 dT}{T} = C_1 \ln \frac{T_f^{irv}}{T_1} \xrightarrow{(13)} > 0 \\ \Delta S_2 &= \int \frac{\Delta Q_2}{T} = \int_{T_2}^{T_f^{irv}} \frac{C_2 dT}{T} = C_2 \ln \frac{T_f^{irv}}{T_2} \xrightarrow{(13)} < 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Από την (18) συνάγεται ότι η *συνολική* μεταβολή της εντροπίας θα πρέπει να είναι θετική είτε με βάση τον δεύτερο νόμο (σελίδα 44-12), η μπορεί να δειχτεί και αναλυτικά καθόσον για:

$$\Delta S_1+\Delta S_2>0 \Rightarrow C_1\ln\frac{T_f^{irv}}{T_1}+C_2\ln\frac{T_f^{irv}}{T_2}>0 \quad \Rightarrow \frac{C_1}{C_1+C_2}\ln\frac{T_f^{irv}}{T_1}+\frac{C_2}{C_1+C_2}\ln\frac{T_f^{irv}}{T_2}>0$$

$$\frac{C_1}{C_1+C_2}\ln\frac{T_f^{irv}}{T_1}+\frac{C_2}{C_1+C_2}\ln\frac{T_f^{irv}}{T_2}\xrightarrow{\upsilon\pi\acute{o}\delta\varepsilon\xi\eta}>\ln\left[\frac{C_1}{C_1+C_2}\frac{T_f^{irv}}{T_1}+\frac{C_2}{C_1+C_2}\frac{T_f^{irv}}{T_2}\right]>0\Rightarrow$$

$$\frac{C_1}{C_1+C_2}\frac{T_f^{irv}}{T_1}+\frac{C_2}{C_1+C_2}\frac{T_f^{irv}}{T_2}>1\Rightarrow C_1T_f^{irv}T_2+C_2T_f^{irv}T_1>(C_1+C_2)T_1T_2 \tag{19}$$

$$C_1\frac{C_1T_1+C_2T_2}{C_1+C_2}T_2+C_2\frac{C_1T_1+C_2T_2}{C_1+C_2}T_1>(C_1+C_2)T_1T_2$$

$$\cancel{C_1^2T_1T_2}+C_1C_2T_2^2+C_1C_2T_1^2+\cancel{C_2^2T_1T_2}>\cancel{C_1^2T_1T_2}+\cancel{C_2^2T_1T_2}+2C_1C_2T_1T_2$$

$$T_1^2+T_2^2-2T_1T_2>0\rightarrow(\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_2)^2>0 \quad \textit{που ισχύει}$$

Επίσης η συνάρτηση είναι αύξουσα ως προ τη τελική θερμοκρασία

$$\frac{\partial(\Delta S)}{\partial T_f^{irv}}=\frac{\partial(\Delta S_1+\Delta S_2)}{\partial T_f^{irv}}=\frac{\partial(C_1\ln\frac{T_f^{irv}}{T_1})}{\partial T_f^{irv}}+\frac{\partial(C_2\ln\frac{T_f^{irv}}{T_2})}{\partial T_f^{irv}} \tag{20}$$
$$=C_1\frac{1/T_1}{T_f^{irv}/T_1}+C_2\frac{1/T_2}{T_f^{irv}/T_2}=\frac{C_1+C_2}{T_f^{irv}}>0$$

Δηλ. θετική και αύξουσα συνάρτηση. Αναμενόμενο αποτέλεσμα, αφού σε κάθε μη αντιστρεπτή διαδικασία αυξάνεται η εντροπία.

Για την πλήρως ***μή αντιστρεπτή μεταβολή*** είδαμε (11), ότι το δυνατόν να παραχθεί έργο είναι μηδενικό ενώ $\Delta U=\Delta Q_1+\Delta Q_2=0$

Για την περίπτωση της πλήρως αντιστρεπτής μεταβολής

$$\Delta S_1+\Delta S_2=0 \tag{21}$$

Προφανώς το μέγιστο μηχανικό έργο αποδίδεται από μια αντιστρεπτή μηχανή που δουλεύει μεταξύ των δύο αυτών θερμοκρασιών (44-6). Δηλ. αντιστοιχεί στη περίπτωση που αναμειγνύονται σιγά-σιγά. Για τη περίπτωση της πλήρως αντιστρεπτής μεταβολής το έργο που μπορεί να παραχθεί από την εν λόγω θερμική μηχανή θα ισούται με τη συνολική μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας καθόσον

$$\Delta U=\cancel{\Delta Q}+\Delta W \tag{22}$$

Οπότε το μέγιστο παραγόμενο έργο θα ισούται με

$$\Delta W=\Delta U=C_1(T_f^{rev}-T_1)+C_2(T_f^{rev}-T_2) \tag{23}$$

(b)

(ii)

Η εναλλαγή των θερμοκρασιών

- δεν επηρεάζει τη φύση των διαδικασιών:
- Αντίθετα προκαλεί διαφοροποίηση της θερμοκρασίας ισορροπίας , αφού οι σχέσεις (13) και (16) που δίδουν της θερμοκρασίες ισορροπίας δεν είναι συμμετρικές στα T_1 και T_2.

Στην μη αντιστρεπτή:

- η συνολική μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας παραμένει μηδενική,
  - ενώ οι επιμέρους μεταβολές ΔU αλλάζουν πρόσημο, παρόλο που θερμοκρασίες ισορροπίας είναι διαφορετικές. Βλέπε σχέσεις (13) και αριθμητικό παράδειγμα παρακάτω.
- Μεταβάλλει
  - Τα πρόσημα και τις αριθμητικές τιμές των επιμέρους μεταβολών της εντροπίας.
  - μόνο την αριθμητική τιμή της συνολικής μεταβολής της εντροπίας (Η περίπτωση που το λίγο ζεστό γάλα αναμιγνύεται με τον πολύ κρύο καφέ προκαλεί μεγαλύτερη μεταβολή στην συνολική εντροπία).
- Το παραγόμενο έργο είναι μηδενικό.

Στην αντιστρεπτή:

- Η συνολική μεταβολή της εντροπίας παραμένει μηδενική,
  - ενώ οι επιμέρους μεταβολές ΔS αλλάζουν πρόσημο, παρόλο που θερμοκρασίες ισορροπίας είναι διαφορετικές. Βλέπε μεσαία σχέση στις σχέσεις (16) και αριθμητικό παράδειγμα παρακάτω.
- Μεταβάλλει
  - Τα πρόσημα και τις αριθμητικές τιμές των επιμέρους μεταβολών της εσωτερικής ενέργειας
  - Την αριθμητική τιμή της συνολικής μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας. (Η περίπτωση που το λίγο ζεστό γάλα αναμιγνύεται με τον πολύ κρύο καφέ παράγει λιγότερο από ότι το αντίστροφο.)

(Κάντε κλικ στον πίνακα του excel για να ανοίξει και να μεταβάλλετε τις παραμέτρους.)

T1=	293,15	K	T_f^{irv} =	344,579 K
T2=	353,15	K	T_f^{rev} =	343,880 K
C1=	50	kcal/T		
C2=	300	kcal/T		

Μη αντιστρεπτή				Αντιστρεπτή			
ΔS1 =	8,082	Kcal/K		ΔS1 =	7,980		
ΔS2 =	-7,371	ΔS=	0,711	ΔS2 =	-7,980	ΔS=	0,000
ΔU1 =	2571,429	Kcal		ΔU1 =	2536,482		
ΔU2 =	-2571,429	ΔU=	0,000	ΔU2 =	-2781,111	ΔU=	-244,629
						ΔW=-ΔU	244,629

T1=	353,15	K	T_f^{irv} =	301,721 K
T2=	293,15	K	T_f^{rev} =	301,053 K
C1=	50	kcal/T		
C2=	300	kcal/T		

Μη αντιστρεπτή				Αντιστρεπτή			
ΔS1 =	-7,869	Kcal/K		ΔS1 =	-7,980		
ΔS2 =	8,646	ΔS=	0,776	ΔS2 =	7,980	ΔS=	0,000
ΔU1 =	-2571,429	Kcal		ΔU1 =	-2604,860		
ΔU2 =	2571,429	ΔU=	0,000	ΔU2 =	2370,837	ΔU=	-234,023
						ΔW=-ΔU	234,023

3ο. Θέμα **Μόρια 25**

a. Παλμός ακτίνων x, που περιέχει συχνότητες $\nu \geq 4\times10^{17} s^{-1}$ διαδίδεται σε ένα μέσο όπου ο δείκτης διάθλασης, για την παραπάνω περιοχή συχνοτήτων, δίνεται από την σχέση

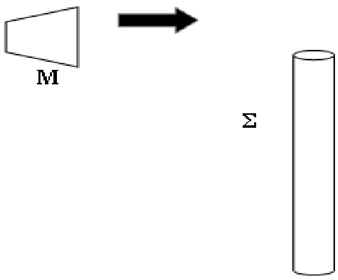
n^2=1-ν_0^2/ν^2, όπου ν_0=$10^{17} s^{-1}$.

i. Βρείτε μια γενική έκφραση που να συνδέει την ομαδική ταχύτητα υ_g του παλμού με τον δείκτη διαθλάσεως του μέσου μέσα στο οποίο διαδίδεται. (5)

ii. Εκφράστε την ομαδική ταχύτητα υ_g και τη φασική ταχύτητα υ_φ του παραπάνω παλμού σα συνάρτηση της συχνότητας. (5)

iii. Τι σημαίνει το γεγονός ότι υ_φ>c; Δείξτε ότι $\upsilon_\varphi \upsilon_g \cong c^2$. (5)

b. Στο σχήμα, ένα μικρό μεγάφωνο Μ παράγει ακουστικά κύματα συχνότητας από 1000 Hz μέχρι 2000 Hz. Ο μεταλλικός σωλήνας Σ έχει μήκος 0.5 m και είναι ανοικτός στα δύο άκρα. Σε ποιες συχνότητες θα παρατηρηθεί συντονισμός εάν η συχνότητα εκπομπής του μεγαφώνου μεταβληθεί από 1000 Hz σε 2000 Hz. Θεωρείστε ότι η ταχύτητα του ήχου στην θερμοκρασία του πειράματος είναι 340 m/s. (10)



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(a)

α) Από τους ορισμούς της ομαδικής ταχύτητας υ_g=$\frac{d\omega}{dk}$ και της φασικής ταχύτητας υ_φ=$\frac{\omega}{k}$

παίρνουμε $\upsilon_g = \frac{d(\upsilon k)}{dk}$=υ+k$\frac{d\upsilon}{dk}$=υ+$\frac{d\upsilon}{d\omega}\frac{d\omega}{dk}$=υ+k$\upsilon_g \frac{d\upsilon}{d\omega}$

Και επειδή υ=$\frac{c}{n}$

παίρνουμε $\upsilon_g = \frac{c}{n} +$ +kc$\upsilon_g \frac{d(\frac{1}{n})}{d\omega}$=$\frac{c}{n} - \frac{kc\upsilon_g}{n^2}\frac{dn}{d\omega}$

οπότε……

υ_g=$\frac{c/n}{1+\frac{\omega dn}{n d\omega}}$=$\frac{c}{n+\omega\frac{dn}{d\omega}}$=$\frac{c}{n+\nu\frac{dn}{d\nu}}$ (1)

β) Η φασική ταχύτητα των ακτίνων Χ στο μέσο θα είναι,

$\upsilon_\varphi = \frac{c}{n}$ =c/ $\sqrt{(1-\frac{\nu_0^2}{\nu^2})}$

Επειδή $\frac{\nu_0^2}{\nu^2} \leq \frac{1}{16}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα $(1+\chi)^\alpha \cong 1+$ αχ. (Η διόρθωση που εισάγει ο τρίτος όρος του αναπτύγματος είναι της τάξεως $\frac{\nu_0^4}{\nu^4} = \frac{1}{16^2}$ =$\frac{1}{256}$ =0.25% και μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα). Ετσι παίρνοιυμε

$\upsilon_\varphi \cong c(1+\frac{\nu_0^2}{2\nu^2})$ *(2).*

Αν χρησιμοποιήσουμε τους δυο πρώτους όρους του δυωνυμικού αναπτύγματος για τον δείκτη διάθλασης n βρίσκουμε n≅1-$\frac{\nu_0^2}{2\nu^2}$ και $\frac{dn}{d\nu} \cong \frac{\nu_0^2}{\nu^3}$.

Οπότε από την παραπάνω έκφραση (1) για την ομαδική ταχύτητα βρίσκουμε

$$\upsilon_g \cong \frac{c}{n+\frac{\nu_0^2}{\nu^2}} = c \Big/ \sqrt{(1-\frac{\nu_0^2}{2\nu^2}+\frac{\nu_0^2}{\nu^2})} \;\cong\; \text{c}(1+\frac{\nu_0^2}{2\nu^2})^{-1}=\text{c}(1-\frac{\nu_0^2}{2\nu^2}).$$

γ) Το γεγονός ότι $\upsilon_\varphi > c$ στη σχέση (2) δεν έρχεται σε αντίθεση με τη θεωρεία της σχετικότητας, γιατί οι πληροφορίες που μεταφέρει το κύμα διαδίδονται με την ομαδική ταχύτητα υ_g. Για την υ_g ισχύει ότι $\upsilon_g \le c$.

Το γινόμενο $\upsilon_\varphi \upsilon_g$ βρίσκεται από την απάντηση β) $\upsilon_\varphi \upsilon_g \cong c(1+\frac{\nu_0^2}{2\nu^2})\,\text{c}(1-\frac{\nu_0^2}{2\nu^2}) =$ $c^2[1-\frac{1}{4}(\frac{\nu_0^4}{\nu^4})\,]$. Όταν ν→∞ οι δύο ταχύτητες τείνουν προς την c.

Οι ιδιοσυχνότητες του σωλήνα που είναι ανοικτός και στα δύο άκρα του θα δίνονται από την σχέση

$$L=\frac{\lambda}{4}=(2n)\frac{\upsilon}{\nu 4} \Rightarrow \nu_n=\frac{n}{2L}\upsilon\ , \qquad n=1,2,3,...$$

όπου L το μήκος του σωλήνα και υ η ταχύτητα του ήχου στον αέρα που περιέχεται στον σωλήνα. Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή τις τιμές του $n=1-6$, προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές (σε Hz) για τις έξι πρώτες ιδιοσυχνότητες του σωλήνα,

$$\nu_1=340\ ,\ \nu_2=680\ ,\ \nu_3=1020Hz\ ,\ \nu_4=1360\ ,\ \nu_5=1700\ ,\ \nu_6=2040$$

Συνεπώς, καθώς η συχνότητα εκπομπής του Μ θα μεταβάλλεται από 1000 Hz σε 2000 Hz, θα εμφανισθούν συντονισμοί στις συχνότητες ν_3, ν_4, ν_5.

4ο. Θέμα **Μόρια 25**

a. Έστω ότι $f(x)$ είναι μια συνάρτηση με περίοδο 2π τέτοια ώστε

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

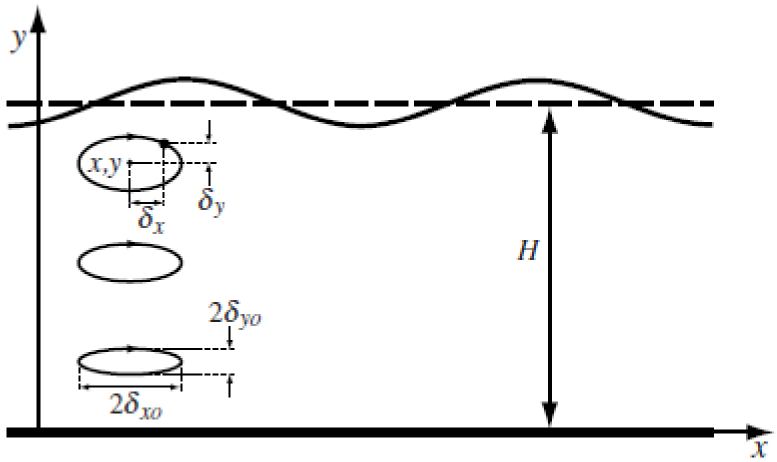
i. Να σχεδιάσετε την $f(x)$ στο διάστημα -3π < x < 3π (3)

ii. Να βρείτε την σειρά Fourier της $f(x)$ (4)

iii. Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις διαλέγοντας κατάλληλη τιμή του x:

(1) $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ και (2) $\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$ (3)

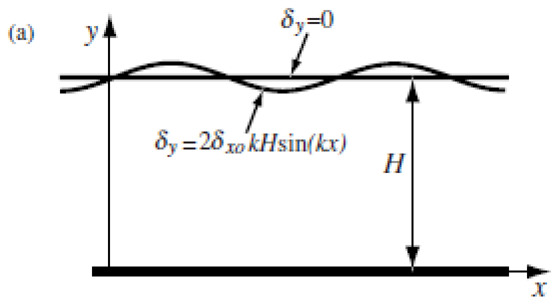
b. Μια καλή προσέγγιση για τα κύματα στην θάλασσα είναι να υποθέσουμε ότι τα μόρια του νερού κάνουν ελλειπτικές τροχιές, όπως φαίνεται στο σχήμα:



H είναι το βάθος του ωκεανού, δ_y και δ_x είναι οι απομακρύνσεις από το κέντρο της έλλειψης. Το πλάτος δ_{y0} μειώνεται με το βάθος και γίνεται 0 στον πυθμένα, ενώ το πλάτος δ_{x0} παραμένει σταθερό. Για ευκολία στους υπολογισμούς θα θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα στάσιμο κύμα στην επιφάνεια. Τότε οι θέσεις των μορίων δίνονται από τις σχέσεις:

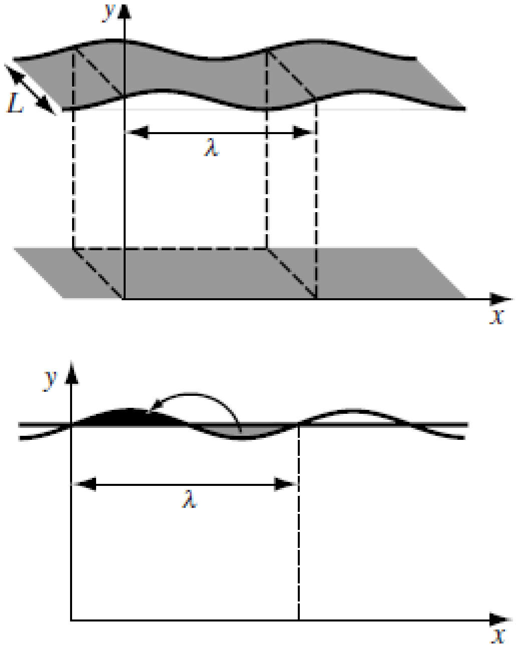
$$\delta_x=2\delta_{x0}\,cos(kx)\sin(\omega t)$$
$$\delta_y=2\delta_{x0}\,kysin(kx)\sin(\omega t)$$

Θεωρήστε δύο ενδιαφέροντα στιγμιότυπα, όπως φαίνονται στο σχήμα:



Το πρώτο αντιστοιχεί στην μέγιστη δυναμική ενέργεια ($\delta_y = 2\delta_{x0}kH$) και μηδενική κινητική ενέργεια, ενώ το δεύτερο στην μέγιστη κινητική ενέργεια και την δυναμική ενέργεια αναφοράς, την οποία θεωρούμε ότι είναι μηδέν.

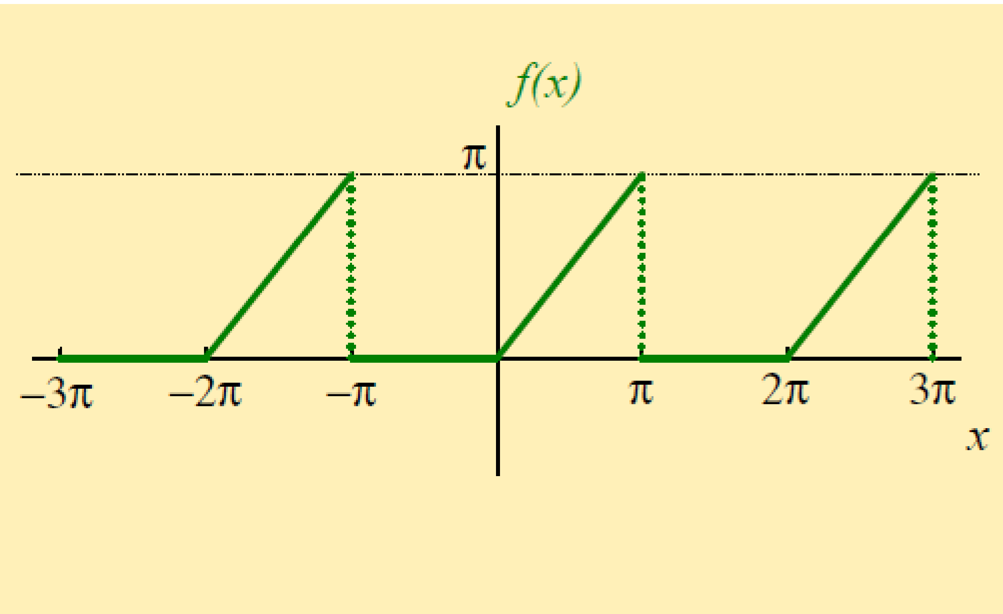
i. Να υπολογίσετε την μέγιστη κινητική και δυναμική ενέργεια και να παράγεται την συνάρτηση ω(k) (= σχέση διασποράς), θεωρώντας επιπλέον ότι $\lambda >> H$ (συνθήκη που ικανοποιείται από κύμα tsunami). Υπόδειξη: Να θεωρήσετε ένα μέρος του μετώπου του κύματος, έστω μήκους L, όπως φαίνεται στο σχήμα και για την περίπτωση που $sin\omega t =$ 1. Η δυναμική ενέργεια του κύματος θεωρούμε ότι ισούται με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας μεταξύ της μάζας του νερού που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια του ήρεμου νερού (οριζόντια γραμμή) και της αντίστοιχης δυναμικής ενέργειας της μάζας του νερού που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια του ήρεμου νερού. (8)



ii. Να προσδιορίσετε την ταχύτητα ομάδας και για ένα βάθος H=4 Km και λ = 6 H υπολογίστε την ταχύτητα ομάδας ενός κύματος tsunami. (7)

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

A.i)



B.i)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \;=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx \;= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos\;\; nx\; dx \;= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cos nx\; dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xcos\;\; nx\; dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\left(\pi\frac{\sin n\pi}{n} - 0\right) + \frac{1}{n}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi n^2}\{\cos n\pi - \cos 0\} = \frac{1}{\pi n^2}\{(-1)^n - 1\}$$

Δηλ.

$$a_n = \begin{cases} 0 & ,n\; άρτιο \\ -\dfrac{2}{\pi n^2} & ,n\; περιττό \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin\;\; nx\; dx \;= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\sin nx\; dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xsin\;\; nx\; dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{\cos \mathrm{nx}}{n}\right)dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{-\left(\pi\frac{\cos n\pi}{n} - 0\right) + \frac{1}{n}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{n}(\cos n\pi) + \frac{1}{\pi n^2}(0-0)\right\}$$
$$= -\frac{1}{n}(-1)^n$$
$$b_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & ,n\; άρτιο \\ \dfrac{1}{n} & ,n\; περιττό \end{cases}$$

Συνολικά η σειρά γράφεται

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right]$$
$$+\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right]$$

Γ.iii.1) Αν διαλέξουμε x = π/2, τότε $f(\pi/2) = \pi/2$ και όλοι οι όροι που περιέχουν συνημίτονα θα είναι μηδέν, άρα

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

ή

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

Γ.iii.2) Αν διαλέξουμε x = 0, τότε $f(0) = 0$ και όλοι οι όροι που περιέχουν ημίτονα θα είναι μηδέν, άρα

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right]$$

ή

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

B.i)
Θα υπολογίσουμε την μέγιστη δυναμική ενέργεια για την πρώτη ενδιαφέρουσα περίπτωση που αντιστοιχεί στο $sin\omega t = 1$ τότε η απομάκρυνση είναι μέγιστη, ενώ όταν $sin\omega t = 0$ η απομάκρυνση είναι 0 και η ταχύτητα είναι μέγιστη γιατί είναι ανάλογη του $cos\omega t = 1$.

$$\Delta U = \int_0^{\lambda/2} \overbrace{dx(\rho L\delta_y)}^{dm} g\delta_y = \int_0^{\lambda/2} dx(\rho Lg\delta_y^2) = 4\rho Lg\delta_{x0}^2 k^2 H^2 \int_0^{\lambda/2} cos^2(kx)dx =$$
$$= 2\rho Lg\delta_{x0}^2 kH^2\pi$$

Για να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια πρέπει να ολοκληρώσουμε από την επιφάνεια μέχρι τον πυθμένα. Από τις εξισώσεις της απομάκρυνσης και για $cos\omega t = 1$ έχουμε για τις συνιστώσες της ταχύτητας:

$$v_x = \delta_{x0}\omega\, cos(kx)$$
$$v_y = \delta_{x0}\omega\, kysin(kx)$$

Συνεπώς

$$K = \frac{\rho L}{2}\int_0^H dy \int_0^\lambda dx(v_x^2 + v_y^2) = 2\rho L\omega^2\, \delta_{x0}^2 \int_0^H dy \int_0^\lambda dx\left(cos^2(kx) + k^2\, y^2\, sin^2(kx)\right) =$$
$$= \frac{2\rho L\omega^2\, \delta_{x0}^2\pi}{k}\int_0^H dy(1 + k^2\, y^2) = \frac{2\rho L\omega^2\, \delta_{x0}^2\pi H}{k}\left(1 + \frac{k^2H^2}{3}\right)$$

Και επειδή $kH = \frac{2\pi H}{\lambda} \ll 1$

$$K \approx \frac{2\rho L\omega^2\, \delta_{x0}^2\pi H}{k}$$

Εξισώνοντας την κινητική με την δυναμική ενέργεια $\Delta U = K$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση

$$\omega^2 \approx (gH)k^2$$

B.ii) Από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\omega = \sqrt{gH}k$$

Άρα

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{gH}$$

Και για τα δεδομένα που έχουμε:

$$v_{gr} \approx \sqrt{40000} \approx 200\frac{m}{s} \approx 720\frac{Km}{h}.$$