1ο. Θέμα Μόρια 25

a. Χρησιμοποιείστε το παράδειγμα που περιγράφεται στη σελίδα 7-4 με τη βοήθεια της εικόνας 7-4 για να πείσετε κάποιον ότι το φεγγάρι «πέφτει» λόγω της βαρύτητας που του ασκείται από τη γη παρόλο που η απόστασή του από αυτήν παραμένει σταθερή. (5)

b. Αποδείξτε τις εξισώσεις κίνησης (θέση και ταχύτητα συναρτήσεις του χρόνου) για την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ενός σώματος χρησιμοποιώντας τους ορισμούς της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Ισχύουν οι σχέσεις αυτές όταν η επιτάχυνση εξαρτάται του χρόνου; Δώστε ένα παράδειγμα. (5)

c. Υποθέστε ότι ο συλλογισμός ενός μαθητή είναι ο εξής: «Ένα αυτοκίνητο και ένα ποδήλατο ξεκινούν την ίδια χρονική στιγμή από τα σημεία εκκίνησης x_0 και x_1 αντίστοιχα έτσι ώστε $x_1 > x_0$ με σταθερές ταχύτητες (V και v αντίστοιχα με $\mathrm{V}>\mathrm{v}$). Όταν το αυτοκίνητο, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, θα έχει φθάσει στο σημείο Β (από εκεί δηλαδή που ξεκίνησε το ποδήλατο) το ποδήλατο θα έχει κινηθεί προς τα εμπρός και θα έχει φθάσει στο σημείο Γ (1ο βήμα). Όταν πάλι το αυτοκίνητο θα φτάσει στο σημείο Γ το ποδήλατο θα έχει περάσει πιο μπροστά, στο σημείο Δ (2ο βήμα). Πάντοτε θα επαναλαμβάνεται η ίδια ιστορία: ‘Όταν το αυτοκίνητο φτάνει στο σημείο που βρισκόταν το ποδήλατο προηγουμένως (π.χ. στα σημεία Β,Γ,Δ,Ε), το ποδήλατο θα έχει ήδη κινηθεί (στα σημεία Γ,Δ,Ε,Ζ αντίστοιχα) μπροστά. Επομένως πάντα το ποδήλατο θα είναι πιο μπροστά από το αυτοκίνητο.» (15)

i. Εξηγείστε χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα θέσης-χρόνου ότι τελικά το αυτοκίνητο θα προσπεράσει το ποδήλατο.

ii. Βρείτε επαγωγικά ότι το νιοστό βήμα διήρκεσε $\mathrm{t_n} = \left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{V}}\right)^{\mathrm{n}-1} \cdot \frac{(x_1 - x_0)}{\mathrm{V}}$ και ότι στο τέλος αυτού του βήματος το ποδήλατο προηγείται κατά $\Delta_{\mathrm{n}} = \left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{V}}\right)^{\mathrm{n}} \cdot (x_1 - x_0)$. Στη συνέχεια δείξτε ότι μετά από άπειρο αριθμό βημάτων το αυτοκίνητο φθάνει το ποδήλατο ενώ ο συνολικός χρόνος αυτών των άπειρων βημάτων είναι πεπερασμένος.

iii. Συγκρίνατε τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(a) σελίδα 7-4. Το φεγγάρι «πέφτει» λόγω της βαρύτητας κατά s σε χρονικό διάστημα t (βλ. σχήμα 7-4, όπου το R αντιστοιχεί στην απόσταση Γη-Σελήνη). Λόγω της ομαλής κυκλικής κίνησης της σελήνης θα ισχύει $\frac{m_\Sigma \upsilon^2}{R} = \frac{G m_\Sigma M_\Gamma}{R^2} = m_\Sigma g \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{G M_\Gamma}{R} = gR$.

Σε χρονικό διάστημα t λοιπόν θα διανύσει απόσταση $x = \sqrt{gR} \cdot t$. Όμως από στο σχήμα έχουμε ότι

$\frac{x}{s}=\frac{2R}{x}\Rightarrow s=\frac{x^2}{2R}$ δηλαδή $s=\frac{gRt^2}{2R}=\frac{1}{2}gt^2$ δηλαδή το διάστημα s αντιστοιχεί στην ελεύθερη πτώση του φεγγαριού.

(b) Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση:

$$\vec{\upsilon}=const\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\upsilon\Rightarrow\int dx=\int\upsilon dt\Rightarrow x=\upsilon t+a\Rightarrow x=\upsilon t+x_0$$

Γενικότερα $\vec{r}=\vec{\upsilon}t+\vec{r}_0$, $\vec{\upsilon}(t)=const$, $\vec{a}(t)=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=0$

Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη:

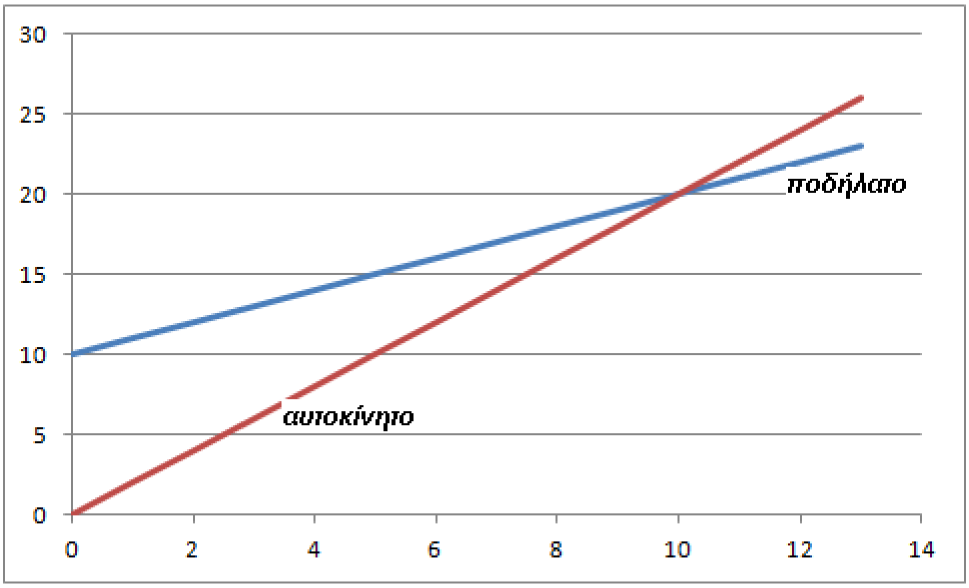
$$\vec{a}=const\Rightarrow\frac{d\upsilon}{dt}=a\Rightarrow\int d\upsilon=\int adt\Rightarrow\upsilon=at+c\Rightarrow\upsilon=at+\upsilon_0$$

$$\upsilon=at+\upsilon_0\Rightarrow\frac{dx}{dt}=at+\upsilon_0\Rightarrow\int dx=\int(at+\upsilon_0)dt\Rightarrow x=\frac{1}{2}at^2+\upsilon_0 t+c\Rightarrow$$

$$x=\frac{1}{2}at^2+\upsilon_0 t+x_0$$

Γενικότερα $\vec{r}=\frac{1}{2}\vec{a}t^2+\vec{\upsilon}_0 t+\vec{r}_0$, $\vec{\upsilon}(t)=\vec{a}t+\vec{\upsilon}_0$, $\vec{a}(t)=const$

(c) Η θέση του αυτοκινήτου είναι $x_a=Vt+x_0$ ενώ του ποδηλάτου $x_\pi=vt+x_1$ Θέτοντας $x_a=x_\pi$ έχουμε ότι $t=\frac{x_1-x_0}{\text{V-v}}$



Ακριβώς πριν την εκκίνηση το ποδήλατο προηγείται κατά: $\Delta_0 = x_1 - x_0$

Βήμα 1: Το αυτοκίνητο ξεκινάει από την θέση x_0 και φτάνει στη θέση x_1 μετά από κάποιο χρονικό διάστημα t_1. Ξέροντας την αρχική και τελική θέση καθώς και την ταχύτητα μπορούμε να υπολογίσουμε το χρόνο t_1 ως: $t_1 = \frac{x_1 \Delta x_0}{V} = \frac{_0}{V}$

Στον ίδιο χρόνο το ποδήλατο προχώρησε μπροστά και έφθασε στη κάποια άλλη θέση, x_2. Μπορούμε να βρούμε ακριβώς το x_2 εφαρμόζοντας την εξίσωση θέσης-χρόνου για την κίνηση του ποδηλάτου, από αρχική θέση x_1 σε τελική θέση x_2 κινούμενη με ταχύτητα v για χρόνο t_1, δηλαδή: $x_2 = \Delta \cdot t_1 + x_1 = \frac{v}{V} \cdot \ _0 + \ _1 \beta$

Στο τέλος αυτού του βήματος το ποδήλατο προηγείται του αυτοκινήτου κατά διάστημα Δ_1 ($=x_2-x_1$) που το υπολογίζουμε εύκολα ως: $\Delta_1 = x_2 - x_1 = \frac{v}{V} \cdot \Delta_0$

Βήμα 2: Το αυτοκίνητο ξεκινάει από την θέση x_1 και φτάνει στη θέση x_2 σε χρόνο t_2.

Την χρονική στιγμή $t=0$ το αυτοκίνητο ήταν στην θέση x_1 και την χρονική στιγμή $t=t_2$ ήταν στην θέση x_2. Ξέροντας λοιπόν την αρχική και τελική θέση από τους υπολογισμούς του προηγούμενου βήματος θα υπολογίσουμε το χρόνο t_2 ως: $t_2 = \frac{\overbrace{x_2 \Delta x_1}^{\Delta_1}}{V} = \frac{_1}{V}$

Η διάρκεια αυτού του βήματος βρίσκεται να είναι: $t_2 = \frac{v\Delta}{V} \cdot \frac{_0}{V}$

Στον ίδιο χρόνο το ποδήλατο προχώρησε μπροστά και έφθασε στη θέση x_3. $x_3 = \Delta \cdot t_2 + x_2 = \left(\frac{v}{V}\right)^2 \cdot \ _0 + \ _2$ Στο τέλος αυτού του βήματος το ποδήλατο προηγείται του αυτοκινήτου κατά Δ_2 ($=x_3-x_2$) που το υπολογίζουμε ως: $\Delta_2 = x_3 - x_2 = \left(\frac{v}{V}\right)^2 \cdot \Delta_0$

Βήμα 3: Το αυτοκίνητο ξεκινάει από την θέση x_2 και φτάνει στη θέση x_3 σε χρόνο t_2. Στον ίδιο χρόνο το ποδήλατο προχώρησε μπροστά και έφθασε στη θέση x_4. Ο χρόνος t_3

είναι: $t_3 = \left(\frac{v\Delta}{V}\right)^2 \cdot \frac{{}_0}{V}$ και στο τέλος του τρίτου βήματος το ποδήλατο προηγείται κατά Δ_3 που δίνεται από την σχέση: $\Delta_3 = x_4 - x_3 = \left(\frac{v}{V}\right)^3 \cdot \Delta_0$

Βήμα n: Επαγωγικά μπορείτε να δείξετε ότι το νιοστό βήμα διήρκεσε: $t_n = \left(\frac{v\Delta}{V}\right)^{n-1} \cdot \frac{{}_0}{V}$ και ότι στο τέλος αυτού του βήματος το ποδήλατο προηγείται κατά:

$\Delta_n = \left(\frac{v}{V}\right)^n \cdot \Delta_0$ Επειδή λόγος $\frac{v}{V}$ είναι μικρότερος από τη μονάδα η ποσότητα Δn τείνει στο μηδέν καθώς το n πηγαίνει στο άπειρο: $\lim_{n\to\infty}\Delta_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{v}{V}\right)^n \cdot \Delta_0 = 0$

Δηλαδή, μετά από άπειρα βήματα η απόσταση των δύο κινητών μηδενίζεται. Συνεπώς, το αυτοκίνητο θα φτάσει στο τέλος το ποδήλατο. Για αυτή την «άπειρη αλληλοδιαδοχή βημάτων» απαιτείται πεπερασμένος χρόνος !!! Ας υπολογίσουμε τον χρόνο, Tn, που χρειάζεται για να ολοκληρωθούν n βήματα, προσθέτοντας τους επιμέρους χρόνους που διήρκεσε το κάθε ένα βήμα. Δηλαδή $T_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$.:

$$T_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \frac{\Delta_0}{V} + \left(\frac{v}{V}\right) \cdot \frac{\Delta_0}{V} + \ldots + \left(\frac{v}{V}\right)^{n-1} \cdot \frac{\Delta_0}{V} = \frac{\Delta_0}{V}\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right) + \ldots + \left(\frac{v}{V}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{\Delta_0}{V}\left(1 + \lambda + \ldots + \lambda^{n-1}\right) = \frac{\Delta_0}{V}\sum_{\nu=0}\lambda^\nu = \frac{\Delta_0}{V}\lim_{\nu\to\infty}\frac{1-\lambda^{\nu+1}}{1-\lambda} = \frac{\Delta_0}{V}\frac{1}{1-\lambda} = \frac{\Delta_0}{V}\frac{V}{V\text{-}v} = \frac{\Delta_0}{V\text{-}v}$$

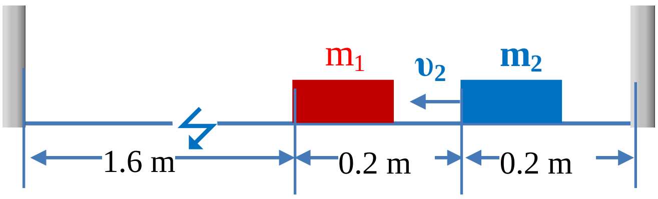
Ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για να συναντηθούν τα δύο κινητά είναι πεπερασμένος και ίσος με το χρόνο που βρήκαμε στην $1^η$ μέθοδο. Έστω και εάν αντιστοιχεί σε άπειρα βήματα, κατ' ανάλογο τρόπο όπου ένα ευθύγραμμο τμήμα πεπερασμένου μήκους αποτελείται από άπειρα σημεία.

2ο. Θέμα **Μόρια 25**

a. Να σχολιασθούν με ακρίβεια και σαφήνεια οι έννοιες της μάζας, βάρους, αδράνειας, ορμής και δύναμης. (5)

b. Να γραφούν και να σχολιασθούν οι τρείς νόμοι το Νεύτωνα γα τη Μηχανική. Ποια από τα παραπάνω μεγέθη εμπλέκει ο κάθε νόμος. (5)

c. Δύο αμαξάκια μάζας $m_1 = 1$ kg και $m_2 < m_1$ κινούνται χωρίς τριβές πάνω σε έναν αεροδιάδρομο του οποίου τα πέρατα αποτελούν δύο κάθετοι τοίχοι ($m_3 = \infty$). Αρχικά το αμαξίδιο m_1 ηρεμεί ενώ το m_2 κινείται προς τα αριστερά με σταθερή ταχύτητα σταθερή $\upsilon_2 = 0.5$ m/s (βλέπε σχήμα). Μετά την κρούση με το m_1, το m_2 κινείται προς τα δεξιά, ανακλάται στον τοίχο και κινείται εκ νέου προς τα αριστερά. Αν όλες οι κρούσεις είναι πλήρως ελαστικές και θεωρώντας αμελητέες τις διαστάσεις των αμαξιδίων,



i. Να βρεθεί ο λόγος των μαζών m_1/m_2 ώστε τελικά τα αμαξάκια να κινούνται προς τα αριστερά με την ίδια ταχύτητα. (5)

ii. Να προσδιοριστεί το m_2, ώστε το m_1 να προλάβει να συγκρουστεί με το m_2 για δεύτερη φορά πριν από τον αριστερό τοίχο. (5)

iii. Να προσδιοριστεί το σημείο δεύτερης κρούσης (από τον αριστερό τοίχο) αν $m_2 = 0.5$ Kg. (5)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(a)

- Η μάζα αναφέρεται στην ποσότητα της ύλης (=ενέργειας) ενός σώματος (= εντοπισμένη ενέργεια).

- Το σωματίδιο Higgs είναι το σωματίδιο που "δίνει" μάζα σε κάθε υλικό.

    - Η επικρατούσα θεωρία προτείνει ότι όλα τα στοιχειώδη σωματίδια αλληλεπιδρούν με το πεδίο Higgs.

    - Γενικά η ανυπαρξία κάποιου συγκεκριμένου σωματιδίου αντιστοιχεί στον μηδενισμό της αντίστοιχης κυματοσυνάρτησης.

    - Για το higgs τα πράγματα είναι διαφορετικά. Το «δικό» του κενό αντιστοιχεί σε μια σταθερή μεν, αλλά όχι μηδενική, τιμή της συνάρτησης που το περιγράφει σ' όλο το χώρο. Η κατάσταση αυτή (με την μη μηδενική τιμή) να έχει χαμηλότερη ενέργεια από την αντίστοιχη με μηδενική τιμή. Γι' αυτό πολλές φορές αναφέρεται ότι το πεδίο higgs γεμίζει το χώρο και ότι η μάζα που αποκτά κάθε σωματίδιο μπορεί να αποδοθεί στην "αντίσταση " που συναντά το σωματίδιο κινούμενο μέσα στο πεδίο του higgs.

- o Όλα τα ηλεκτρόνια, quarks, πρωτόνια κ.λπ. αλληλεπιδρούν με το Higgs και αυτό δημιουργεί μια αδρανή ιδιότητα του χώρου η οποία είναι η μάζα της αδράνειας. Διαφορετικά, κάθε τι που παράγεται κολυμπά μέσα σε μια οντότητα του σύμπαντος που είναι σταθερή και με την επίδραση της προσδιορίζει πόσο αργά ή γρήγορα κινούνται τα σώματα, αυτό παράγει τη μάζα.

- Στη Νευτώνεια μηχανική θεωρούμε ότι η μάζα παραμένει σταθερή, ανεξάρτητη από την ταχύτητα και το χρόνο και ότι αν ενώσουμε δύο αντικείμενα οι μάζες των αθροίζονται (γενικά δεν ισχύουν).
  - o Η μάζα αντιστέκεται στην αλλαγή της αδρανειακής κατάστασης ενός σώματος όταν επιδρά δύναμη πάνω σ' αυτό.

- Το βάρος έχει να κάνει με τη δύναμη που ασκείται στην εν λόγω μάζα αν βρεθεί εντός ενός βαρυτικού πεδίου.

- Το βάρος είναι ανάλογο της μάζας και ποικίλει ανάλογα με το βαρυτικό πεδίο, ενώ η μάζα παραμένει (κλασσικά) ανεξάρτητη του πεδίου.

- Η μάζα χρησιμοποιείται ως ποσοτικό μέτρο της αδράνειας.
  - o Η μάζα (αδρανειακή) μετρείται μέσω των εξισώσεων κίνησης π.χ. μετρώντας τη δύναμη που απαιτείται για να εκτελέσει ένα σώμα δεμένο σε ένα σχοινί κυκλική κίνηση ή από τη μέτρηση της πίεσης, και όχι μέσω του βάρους (βαρυτική). (Αν και δεν έχει (προς το παρόν) διαπιστωθεί απόκλιση μεταξύ των αδρανειακής και βαρυτικής μάζας. Αναμένεται να υφίσταται αισθητή διαφοροποίηση σε πολύ ισχυρά βαρυτικά πεδία (μαύρες τρύπες).

- Η αδράνεια συνδέται με την κινητική κατάσταση του σώματος (γραμμική ή περιστροφική. Εδώ έχουμε τη ροπή (!!) αδρανείας. Πάλι όμως είναι ανάλογη της μάζας).

- Η Ορμή ΔΕΝ είναι το ίδιο με την ταχύτητα. (Αν και στην καθομιλουμένη συχνά θεωρούνται ισοδύναμες).

- Η ορμή αποτελείται από δύο μέρη. Το γινόμενο της ταχύτητας και της μάζας.
  - o Η ορμή μπορεί να είναι σταθερή, χωρίς ούτε η ταχύτητα ούτε η μάζα να είναι σταθερή, (απλά το ένα αντίστροφο του άλλου).

- Η δύναμη είναι το αίτιο που προκαλεί χρονική μεταβολή της ορμής.

- Η δύναμη μεταβάλει την αδρανειακή κατάσταση ενός σώματος.

- Η δύναμη καθορίζει τη μορφή της κίνσης.

- Υπάρχουν διάφορες ειδών δυνάμεις (τέσσερις) που υλοποιούνται μέσω των των αντιστοίχων αλληλεπιδράσεων (στοιχειώδη σωμάτια, κβάντα πεδίων).

(b)

I. Νόμος της Αδράνειας

Κάθε σώμα, που βρίσκεται μέσα σε ένα αδρανειακό σύστημα, διατηρεί την κατάσταση ηρεμίας, ή ευθύγραμμης και ομαλής κίνησής του, εφόσον καμία εξωτερική δύναμη δεν επιδρά σε αυτό (Το αφήνουμε "ήσυχο"!!).

$$\sum \boldsymbol{F}_{\varepsilon\xi} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει όχι μόνο η συνισταμένη των δυνάμεων να είναι μη μηδενική αλλά να δράσει και για κάποιο χρονικό διάστημα. Το φυσικό μέγεθος το οποίο προκύπτει από το γινόμενο της συνισταμένης δύναμης και του χρονικού διαστήματος καλείται ώθηση και είναι ο απόλυτος κριτής της μεταβολής που θα υποστεί η κινητική κατάσταση του σώματος-σημείου. Η αδράνεια είναι χαρακτηριστική ιδιότητα της ύλης.

Προφανώς αυτό ο νόμος εμπλέκει τις έννοιες της αδράνειας, της μάζας, και εμμέσως της ορμής (ταχύτητας).

II. Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με τη δύναμη που ασκήθηκε πανω του. Η δύναμη είναι το αίτιο της προκαλούμενης αλλαγής. Ορίζεται δε έμμεσα δηλαδή από το αποτέλεσμα το οποίο προκαλεί η δράση της για ικανό χρονικό διάστημα. Η έννοια του ρυθμού μεταβολής φυσικού μεγέθους θεωρείται απο τις "ουκ άνευ" έννοιες της Κλασσικής Μηχανικής.

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})$$

Προφανώς, για να έχουμε μεταβολή της ορμής δεν είναι απαραίτητο να μεταβάλλεται το μέτρο της, αρκεί και μεταβολή μόνο στη διεύθυνση της (κυκλική κίνηση κλπ).

Εμπλέκει άμεσα τη δύναμη, την ορμή, τη μάζα και μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την ταχύτητα και την τροχιά ενός σώματος πάνω στο οποίο ασκούνται δυνάμεις. Ονομάζεται και θεμελιώδης γιατί, "τυπικά", μας επιτρέπει να λύσουμε οιοδήποτε πρόβλημα της μηχανικής αν ξέρουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτά.

III. Νόμος δράσης-αντίδρασης

Οι δυνάμεις στη φύση εμφανίζονται κατά ζεύγη. Είναι αδύνατον να εμφανισθεί περιττός αριθμός δυνάμεων. Όταν ένα σώμα ασκεί μια δύναμη σε ένα άλλο τότε δέχεται μία αντίθετη δύναμη δηλαδή μία δύναμη ίσου μέτρου αλλά αντίθετης κατεύθυνσης. **Οι δύο δυνάμεις δεν αλληλοεξουδετερώνονται διότι ασκούνται σε διαφορετικά σώματα.** Το ζεύγος των δυνάμεων στο οποίο οι δυνάμεις θα είναι ίσου μέτρου, αντίθετης κατεύθυνσης και θα ασκούνται σε διαφορετικό σώμα, θα ονομάζονται **δράση-αντίδραση.** Ο τρίτος νόμος ουσιαστικά λέει ότι όλες οι δυνάμεις είναι αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης μεταξύ διαφορετικών σωμάτων μας!. Επίσης υπονοεί ότι οι δυνάμεις ασκούνται ακαριαία !! και ταυτόχρονα.

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$$

Εμπλέκει τα ίδια μεγέθη όπως και ο δεύτερος νόμος. Προσοχή ίδιες δυνάμεις δεν σημαίνει και ίδια μεταβολή της κινητικής καταστάσεως των επιμέρους σωμάτων, καθόσον η αδράνεια τους είναι διαφορετική.

Και οι τρείς νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν με καλή προσέγγιση για μακροσκοπικά αντικείμενα. Όμως είναι ακατάλληλοι για την περιγραφή ορισμένων καταστάσεων (μικρή κλίμακα, υψηλές ταχύτητες, ισχυρά βαρυτικά πεδία, αγωγιμότητα σε ημιαγωγούς (αρνητική μάζα), οπτικές ιδιότητες στερεών, υπεραγωγιμότητα κλπ.

(c)

(i)

Από την εκφώνηση συνάγεται, ότι, αφού τελικά θα πρέπει να κινούνται με την ίδια ταχύτητα και επειδή μετά την ανάκλασή του στο τοίχο η ταχύτηττά του απλά αντιστρέφεται, η ταχύτητα του αμαξιδίου 2 αμέσως μετά την πρώτη κρούση θα είναι

$$\boldsymbol{\upsilon}_2' = -\boldsymbol{\upsilon}_1' \qquad (1)$$

Οπότε από τους νόμους διατήρησης ορμής και ενέργειας θα έχουμε

$$\begin{aligned} m_1\boldsymbol{\upsilon}_1' + m_2\boldsymbol{\upsilon}_2' &= m_2\boldsymbol{\upsilon}_2 \\ m_1\boldsymbol{\upsilon}_1'^2 + m_2\boldsymbol{\upsilon}_2'^2 &= m_2\boldsymbol{\upsilon}_2^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) αντίστοιχα προκύπτει

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\upsilon}_2'(1-\frac{m_1}{m_2}) &= \boldsymbol{\upsilon}_2 \\ \boldsymbol{\upsilon}_2'^2(1+\frac{m_1}{m_2}) &= \boldsymbol{\upsilon}_2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} m_1 / m_2 = 0 \\ \boxed{m_1 /ή m_2 = 3 \quad \alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau} \end{cases} \qquad (3)$$

(ii)

Οι χρόνοι κίνησης των αμαξιδίων 1 και 2 έως τον αριστερό τοίχο θα είναι

$$t_1 = 1{,}6 / \upsilon_1' \qquad t_2 = (2 + 0{,}2 + 0{,}2) / \upsilon_2' = 2{,}4 / \upsilon_2' \qquad (4)$$

Και επειδή ζητείται $t_1 > t_2$ από τις (4) προκύπτει ότι

$$\upsilon_2' / \upsilon_1' > 1{,}5 \qquad (5)$$

Θέτοντας $x = m_1 / m_2$ από το νόμο της διατήρησης της κινητικής ενέργειας έχουμε

$$m_1 \upsilon_1'^2 + m_2 \upsilon_2'^2 = m_2 \upsilon_2^2 \quad \Rightarrow \frac{\upsilon_2'^2}{\upsilon_1'^2} = \frac{\upsilon_2^2}{\upsilon_1'^2} - x \tag{6}$$

Η (6) με τη βοήθεια του νόμου της διατήρησης της ορμής δίδει

$$\frac{\upsilon_2'}{\upsilon_1'} = \frac{x-1}{2} \tag{7}$$

Τέλος από τις (7) και (5) προκύπτει

$$\frac{\upsilon_2'}{\upsilon_1'} = \frac{x-1}{2} > 1,5 \qquad \Rightarrow \boxed{x > 4} \tag{8}$$

(iii)

Δεδομένου ότι m_2=0.5 kg , δηλ. x= m_1/m_2 = 2 από το αποτέλεσμα του ερωτήματος (ii) συνάγεται ότι η δεύτερη κρούση γίνεται αφού το αμαξίδιο ανακλασθεί στον αριστερό τοίχο.

Από τις (2) προκύπτει ότι μετά την πρώτη κρούση οι ταχύτητες των αμαξιδίων είναι:

$$\left.\begin{array}{l} 2\upsilon_1' - \upsilon_2' = \upsilon_2 \\ 2\upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2 = \upsilon_2^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon_1' = \dfrac{2}{3}\upsilon_2, \ \cancel{\upsilon_1' = 0} \\ \upsilon_2' = -\dfrac{1}{3}\upsilon_2 \end{array} \tag{9}$$

Επειδή όλες οι κρούσεις είναι ελαστικές το μέτρο των ταχυτήτων διατηρείται, απλά αλλάζουν φορά με τις κρούσεις στους τοίχους. Συνεπώς αν το σημείο συνάντησης απέχει x από τον αριστερό τοίχο και η δεύτερη κρούση λαμβάνει χώρα σε χρόνο t_2 μετά την πρώτη (t_1= 0 s) στο x_0=1.6m θα πρέπει να ισχύει

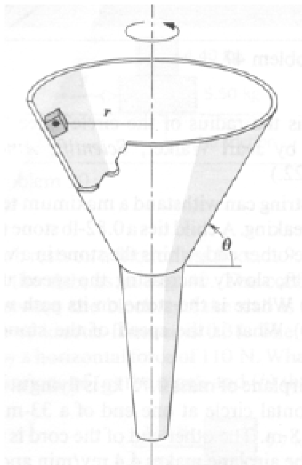
$$\begin{array}{ll} t_2 = \dfrac{x_0 + x}{|\upsilon_1'|} = \dfrac{x_0 + 2\times 0.4 - x}{|\upsilon_2'|} & \Rightarrow \dfrac{1.6 + x}{\frac{2\times 0.5}{3}} = \dfrac{1.6 + 0.8 - x}{\frac{1\times 0.5}{3}} \\ 3(1.6 + x) = 6(2.4 - x) & \Rightarrow x = 9.6/9 = 1.07m \end{array} \tag{10}$$

3ο. Θέμα **Μόρια 25**

a. Συγκρίνατε με παραδείγματα την βαρυτική δύναμη με την δύναμη της τριβής, ποιές είναι οι διαφορές; (5)

b. Γιατί είναι βολική η περιγραφή της αλληλεπίδρασης από απόσταση με πεδίο και όχι με δυνάμεις, σε ποιές περιπτώσεις το πεδίο αποκτά περισσότερο φυσική υπόσταση; (5)

c. Ένας πολύ μικρός κύβος μάζας m τοποθετείται στο εσωτερικό ενός χωνιού (βλ. σχήμα) που περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα με σταθερό ρυθμό v περιστροφές ανά δευτερόλεπτο. Το τοίχωμα του χωνιού σχηματίζει γωνία θ με τον ορίζοντα. Ο συντελεστής της στατικής τριβής είναι μ_s και το κέντρο του κύβου απέχει απόσταση r από τον άξονα περιστροφής. Βρείτε (α) την μικρότερη και (β) την μεγαλύτερη τιμή του v για τις οποίες ο κύβος δεν θα κινηθεί σε σχέση με το χωνί. (15)



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

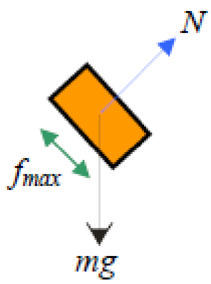
(a) Feynman 12-2

(b) Feynman 12-4: Παράγραφοι 2-4

(c) Η γωνιακή ταχύτητα του χωνιού είναι $2\pi v$.

Η κεντρομόλος δύναμη είναι $m(2\pi v)^2 r$.

Η μέγιστη δύναμη τριβής είναι $f_{max} = \mu_s N$, όπου N είναι η κάθετη αντίδραση. Στην περίπτωση (α) για την ελάχιστη συχνότητα περιστροφής η δύναμη της τριβής θα έπρεπε να κατευθύνεται προς τα πάνω κατά μήκος της σφήνας.



Εξισώσεις των δυνάμεων κατά μήκος του άξονα x:

$$N\sin\theta - f_{max}\cos\theta = m(2\pi v)^2 r$$

$$N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta = m(2\pi v)^2 r$$

$$N = \frac{m(2\pi v)^2 r}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta} \qquad (1)$$

Εξισώσεις των δυνάμεων κατά μήκος του άξονα y:

$$N\cos\theta + f_{max}\sin\theta = mg$$

$$N(\cos\theta + \mu_s\sin\theta) = mg \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{m(2\pi v)^2 r(\cos\theta + \mu_s\sin\theta)}{(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)} = mg$$

$$v = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)}{r(\cos\theta + \mu_s\sin\theta)}}$$

$$v = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g(\tan\theta - \mu_s)}{r(1 + \mu_s\tan\theta)}}$$

Στην περίπτωση (β), για την μεγαλύτερη συχνότητα περιστροφής η δύναμη της τριβής θα δείχνει προς τα κάτω κατά μήκος της σφήνας. Η εξίσωση της δύναμης κατά μήκος του άξονα x θα είναι:

$$N \sin\theta + f_{max} \cos\theta = m(2\pi\nu)^2 r$$

$$N \sin\theta + \mu_s N \cos\theta = m(2\pi\nu)^2 r$$

$$N = \frac{m(2\pi\nu)^2 r}{\sin\theta + \mu_s \cos\theta} \qquad (3)$$

Οι εξισώσεις της δύναμης κατά μήκος του άξονα y θα είναι:

$$N \cos\theta - f_{max} \sin\theta = mg$$

$$N\,(\cos\theta - \mu_s \sin\theta) = mg \qquad (4)$$

Συνδυάζοντας τις (3) και (4) παίρνουμε

$$\frac{m(2\pi\nu)^2 r(\cos\theta - \mu_s \sin\theta)}{(\sin\theta + \mu_s \cos\theta)} = mg$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g(\sin\theta + \mu_s \cos\theta)}{r(\cos\theta - \mu_s \sin\theta)}}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g(\tan\theta + \mu_s)}{r(1 - \mu_s \tan\theta)}}$$

4ο. Θέμα **Μόρια 25**

Χάντρα μάζας m μπορεί να κινείται ελεύθερα χωρίς τριβές σε σύρμα υπό την επίδραση του βάρους της. Έστω ότι x είναι ο οριζόντιος άξονας και y (προς τα κάτω) η κατακόρυφος, οπότε η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι προς τα θετικά του άξονα y.

i. Αν το σύρμα έχει μια τυχαία ομαλή καμπύλη μορφή, η χάντρα ξεκινά ακίνητη αρχικά από το πάνω σημείο (x=0, y=0) και κινείται προς το σημείο (x,y), να αποδείξετε ότι ο χρόνος που απαιτείται να φθάσει στο σημείο αυτό δίνεται από την σχέση $t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x\sqrt{\frac{1+(dy/dx)^2}{y}}dx$. (6)

ii. Αν το σύρμα έχει την μορφή κυκλικού δακτυλίου ακτίνας R, που είναι κατακόρυφος και περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα ω γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του. **(α)** Βρείτε τις θέσεις ισορροπίας της χάντρας και διερευνήστε τι συμβαίνει για τις διάφορες τιμές της συχνότητας ω. (7) **(β)** Διερευνήστε τι είδους θέσεις ισορροπίας υπάρχουν (ευσταθείς ή ασταθείς).(6) **(γ)** Ποιες είναι οι συχνότητες μικρών ταλαντώσεων γύρω από τις θέσεις ευσταθούς ισορροπίας; (6)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Από το θεώρημα διατήρησης της συνολικής ενέργειας προκύπτει ότι

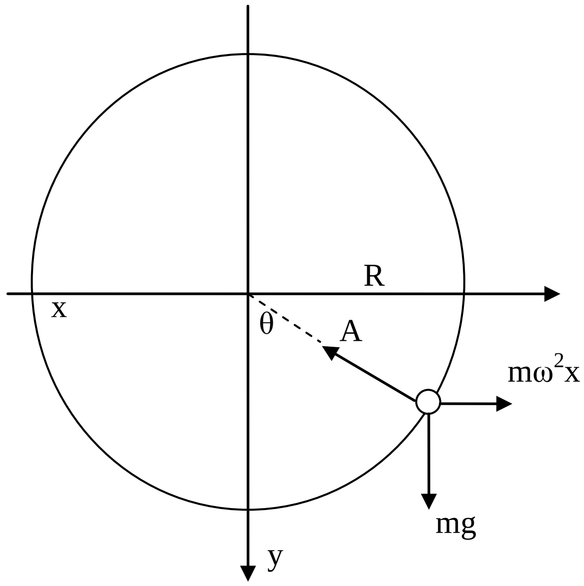
$$\frac{1}{2}mv^2=mgy \quad\Rightarrow\quad 2gy=v^2=v_x^2+v_y^2=\left(dx/dt\right)^2+\left(dy/dt\right)^2$$

Οπότε

$$dt=\frac{1}{\sqrt{2g}}\left[\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{y}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\left[\sqrt{\frac{1+(dy/dx)^2}{y}}\right]dx$$

Και τελικά

$$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x\sqrt{\frac{1+(dy/dx)^2}{y}}dx$$



Β) Στην χάντρα, όταν είναι σε τυχαία θέση ασκούνται οι δυνάμεις: το βάρος mg, η αντίδραση Α και η φυγόκεντρος δύναμη $m\omega^2x$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Η ισορροπία των δυνάμεων κατά την ακτίνα και κάθετα σε αυτή (εφαπτομενικά στην στεφάνη) δίνει τις εξισώσεις

$$A-mg\cos\theta-m\omega^2x\sin\theta=m\frac{v^2}{R}=0$$

$$-mg\sin\theta + m\omega^2 x\cos\theta = m\frac{dv}{dt} = 0$$

Επειδή $\sin\theta = \frac{x}{R}$, από την δεύτερη εξίσωση προκύπτει ότι $x\frac{g}{R} = x\omega^2\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}}$

Η μία λύση είναι $x=0$, οπότε θ=0, $\cos\theta = 1$, και $A = mg$.

Η άλλη λύση δίνει ότι $\frac{x}{R} = \sqrt{1-\frac{g^2}{R^2\omega^4}}$.

Για να ισχύει αυτή η λύση, θα πρέπει η συχνότητα να είναι μεγαλύτερη από μια οριακή τιμή $\omega^2 \geq \frac{g}{R}$. Για μικρότερες συχνότητες η χάντρα ισορροπεί μόνο στο κατώτερο σημείο της στεφάνης.

(β) Για μικρές μετατοπίσεις από την θέση ισορροπίας θα ισχύει για την εφαπτομενική συνιστώσα ότι:

$$-mg\sin(\theta+\delta\theta) + m\omega^2 R\sin(\theta+\delta\theta)\cos(\theta+\delta\theta) =$$

$$= -mg\sin\theta\cos\delta\theta - mg\cos\theta\sin\delta\theta + m\omega^2 R\left[\sin\theta\cos\delta\theta + \cos\theta\sin\delta\theta\right]\left[\cos\theta\cos\delta\theta - \sin\theta\sin\delta\theta\right]$$

$$\cong -mg\sin\theta - mg(\delta\theta)\cos\theta + m\omega^2 R\left[\sin\theta\cos\theta + (\delta\theta)\cos^2\theta - (\delta\theta)\sin^2\theta - (\delta\theta)^2\sin\theta\cos\theta\right]$$

Που από την ισότητα $g = \omega^2 R\cos\theta$, οδηγεί σε πρώτης δύναμης προσέγγιση ως προς το (δθ) στην εφαπτομενική δύναμη επαναφοράς $-m\omega^2 R\sin^2\theta(\delta\theta)$, που υποδηλώνει ευσταθή ισορροπία.

Για την άλλη θέση ισορροπίας (x=0) θα έχουμε ότι $\delta x = R(\delta\theta)$ και εφαπτομενική δύναμη κατά τον άξονα x ίση προς

$$-mg\sin(\delta\theta) + m\omega^2 R(\delta\theta)\cos(\delta\theta) \cong -mg(\delta\theta) + m\omega^2 R(\delta\theta) = mR\left[\omega^2 - \frac{g}{R}\right](\delta\theta)$$

που είναι μια θετική ποσότητα όταν $\omega^2 \geq \frac{g}{R}$, το οποίο με τη σειρά του υποδηλώνει ασταθή ισορροπία (δύναμη ομόσημη της απομάκρυνσης), ενώ όταν $\omega^2 < \frac{g}{R}$ έχουμε ευσταθή ισορροπία Στην τελευταία αυτή περίπτωση, $\omega^2 < \frac{g}{R}$, η μόνη ευσταθής λύση είναι στο x=0.

(γ) Όταν $\omega^2 \geq \frac{g}{R}$, η δύναμη επαναφοράς θα είναι $-m\omega^2 R\sin^2\theta(\delta\theta)$ και από την εξίσωση της εφαπτομενικής κίνησης θα είναι ισοδύναμη με μια σταθερά ελατηρίου [δύναμη ανά εφαπτομενική απομάκρυνση που είναι $x = R(\delta\theta)$] $m\omega^2\sin^2\theta$, οπότε η ιδιοσυχνότητα μικρών ταλαντώσεων θα δίνεται από την σχέση $\omega_\tau^2 = \frac{m\omega^2\sin^2\theta}{m} = \omega^2\sin^2\theta = \left(1-\frac{g^2}{R^2\omega^4}\right)$.

Όταν $\omega^2 < \frac{g}{R}$, τότε η δύναμη επαναφοράς θα είναι $mR\left[\frac{g}{R}-\omega^2\right]$, η σταθερά ελατηρίου $m\left[\frac{g}{R}-\omega^2\right]$ και η ιδιοσυχνότητα μικρών ταλαντώσεων $\omega_\tau^2 = \left[\frac{g}{R}-\omega^2\right]$.