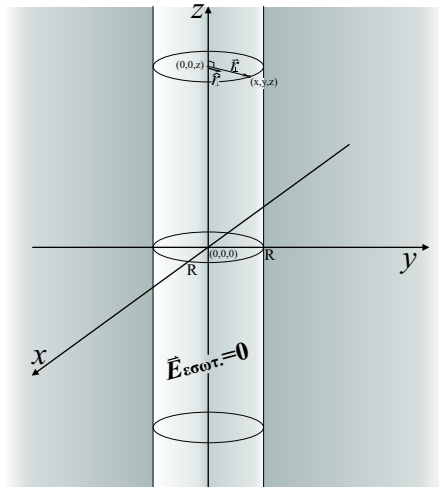




ΘΕΜΑ 1 / α. / (i)



$$\vec{E}_{εξωτ.} = A \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2} = A \frac{\vec{r}_\perp}{r_\perp^2} = A \frac{\hat{r}_\perp}{r_\perp} \quad \left/ \quad \vec{r}_\perp = x\hat{i} + y\hat{j} \quad \right/ \quad r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{E}_{εξωτ.} = \frac{Ax}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{Ay}{x^2 + y^2} \hat{j} + 0\hat{k}$$

$$E_x = \frac{Ax}{x^2 + y^2}, \quad E_y = \frac{Ay}{x^2 + y^2}, \quad E_z = 0$$

Βοηθητικές σχέσεις...

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_y(x, y)}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial 0}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_x(x, y)}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial 0}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{Ax}{x^2 + y^2} = Ax \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1} = Ax(-1)(x^2 + y^2)^{-2} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = -\frac{Ax}{(x^2 + y^2)^2} 2y = -\frac{2Axy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{Ay}{x^2 + y^2} = Ay \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} = Ay(-1)(x^2 + y^2)^{-2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = -\frac{Ay}{(x^2 + y^2)^2} 2x = -\frac{2Axy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3)$$

➡ Συνθήκη ηλεκτροστατικού πεδίου: το πεδίο να είναι αστρόβιλο δηλαδή: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_y & E_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ E_x & E_y \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \xrightarrow{(1),(2),(3)}$$

$$\longrightarrow \hat{i}(0 - 0) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k} \left(-\frac{2Axy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2Axy}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \hat{i}0 - \hat{j}0 + \hat{k}0 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

άρα το πεδίο είναι
ηλεκτροστατικό,
αστρόβιλο,
συντηρητικό

ΘΕΜΑ 1 / α. / (ii)

$$\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + 0 \hat{k} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι: $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ δηλαδή η ποσότητα V (το δυναμικό) δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή z . Είναι της μορφής $V(x,y)$.

ΘΕΜΑ 1 / α. / (iii)

▶ Μέσα: $r < R$ $\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E dr \Rightarrow \int_{V_0}^V dV = -\int_0^r E_{\text{εσωτ.}} dr \Rightarrow V - V_0 = -\int_0^r 0 dr = 0 \Rightarrow V = V_0$

για κάθε εσωτερικό σημείο

$r=0, V=V_0$
σημείο (0,0,0)

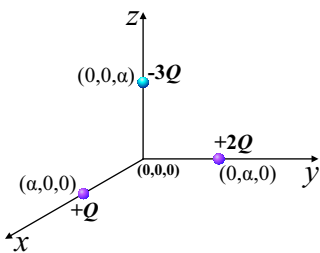
Παρόμοιες συνθήκες με αυτές στο εσωτερικό μεταλλικού αγωγού όπου $E=0$ και V =σταθερό.

▶ Έξω: $r \geq R$ $V = -\int_0^r \vec{E} d\vec{r} = -\int_0^R \vec{E}_{\text{εσωτ.}} d\vec{r} - \int_R^r \vec{E}_{\text{εξωτ.}} d\vec{r} = V_0 - \int_R^r \frac{A\hat{r}}{r} d\vec{r} = V_0 - A \int_R^r \frac{dr}{r} = V_0 - A \ln r \Big|_R^r \Rightarrow V = V_0 - A \ln \frac{r}{R}$

για κάθε εξωτερικό σημείο
(...όπου: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$V(x, y, z) = V(x, y) = \begin{cases} V_0 & \dots r < R \\ V_0 - A \ln \frac{r}{R} & \dots r \geq R \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 1 / β. / (i)

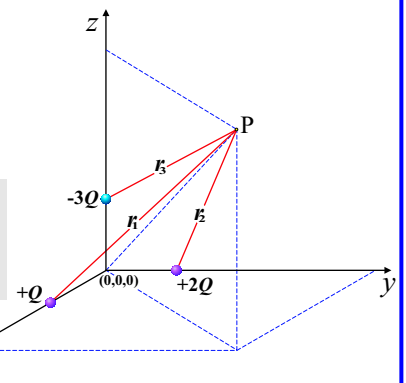


$$\phi(0,0,0) = \phi_{(+Q)} + \phi_{(+2Q)} + \phi_{(-3Q)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+Q)}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+2Q)}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-3Q)}{a} \Rightarrow \phi(0,0,0) = 0$$

2ος τρόπος

$$\phi_p(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+Q)}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+2Q)}{r_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-3Q)}{r_3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} - \frac{3}{r_3} \right) \Rightarrow$$

$$\phi_p(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}} - \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} \right)$$



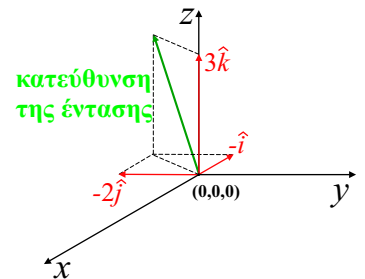
$$(0,0,0) \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \phi(0,0,0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2}} + \frac{2}{\sqrt{a^2}} - \frac{3}{\sqrt{a^2}} \right) \Rightarrow \phi(0,0,0) = 0$$

ΘΕΜΑ 1 / b. / (ii)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{-1/2} \hat{i} + 2 \frac{\partial}{\partial y} [x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{-1/2} \hat{j} - 3 \frac{\partial}{\partial z} [x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{-1/2} \hat{k} \right) = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{-3/2} 2(x-a)\hat{i} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{1}{2} [x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{-3/2} 2(y-a)\hat{j} + \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{1}{2} [x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{-3/2} 2(z-a)\hat{k} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{E}(x,y,z) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \hat{i} + 2 \frac{y-a}{[x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{3/2}} \hat{j} - 3 \frac{z-a}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}} \hat{k} \right] \end{aligned}$$

Στην αρχή των αξόνων (0,0,0) έχουμε:

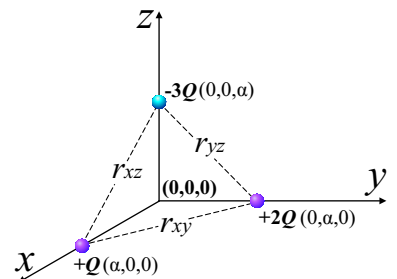
$$\begin{aligned} \vec{E}(0,0,0) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{0-a}{[(0-a)^2 + 0^2 + 0^2]^{3/2}} \hat{i} + 2 \frac{0-a}{[0^2 + (0-a)^2 + 0^2]^{3/2}} \hat{j} - 3 \frac{0-a}{[0^2 + 0^2 + (0-a)^2]^{3/2}} \hat{k} \right] = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(-a)}{[a^2]^{3/2}} \hat{i} + 2 \frac{(-a)}{[a^2]^{3/2}} \hat{j} - 3 \frac{(-a)}{[a^2]^{3/2}} \hat{k} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{a}{a^3} \hat{i} - 2 \frac{a}{a^3} \hat{j} + 3 \frac{a}{a^3} \hat{k} \right] = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{a^2} \hat{i} - 2 \frac{1}{a^2} \hat{j} + 3 \frac{1}{a^2} \hat{k} \right] \Rightarrow \vec{E}(0,0,0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} [-\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}] \end{aligned}$$



ΘΕΜΑ 1 / b. / (iii)

$$r_{xy} = r_{yz} = r_{zx} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} U &= \sum_{ij} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+Q)(+2Q)}{r_{xy}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+2Q)(-3Q)}{r_{yz}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+Q)(-3Q)}{r_{zx}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q^2}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{6Q^2}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q^2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a\sqrt{2}} (2 - 6 - 3) \Rightarrow U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{7Q^2}{a\sqrt{2}} \end{aligned}$$



ΘΕΜΑ 1 / b. / (iv)

$$\vec{P}_{(0,0,0)} = \sum_{i=1}^3 q_i \vec{r}_i = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2 + q_3 \vec{r}_3 = Qa\hat{i} + 2Qa\hat{j} - 3Qa\hat{k} \Rightarrow \vec{P}_{(0,0,0)} = Qa(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

ΘΕΜΑ 1 / ε. / (i)

$$\phi = A(x^2 - y^2 + 4xy + \sqrt{5}z^2)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)[A(x^2 - y^2 + 4xy + \sqrt{5}z^2)] \Rightarrow \vec{E} = -A[(2x + 4y)\hat{i} + (-2y + 4x)\hat{j} + (2\sqrt{5}z)\hat{k}]$$

ΘΕΜΑ 1 / ε. / (ii)

Από την προηγούμενη σχέση έχουμε τις τρεις συνιστώσες της έντασης:

$$E_x = -A(2x + 4y)$$

$$E_y = -A(-2y + 4x)$$

$$E_z = -A(2\sqrt{5}z)$$

Το μέτρο της έντασης: $E_0 = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \Rightarrow E_0^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 = A^2(2x + 4y)^2 + A^2(-2y + 4x)^2 + A^2 20z^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{E_0^2}{A^2} = 4x^2 + 16y^2 + 16xy + 4y^2 + 16y^2 - 16xy + 20z^2 = 20x^2 + 20y^2 + 20z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{E_0^2}{20A^2} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{E_0^2}{20A^2} = 0$$

Εξίσωση Σφαίρας: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$

...με κέντρο: $K(-a, -b, -c)$

...και ακτίνα: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$



Άρα **σφαίρα** με κέντρο: $K(0,0,0)$

και ακτίνα:

$$R = \sqrt{-\left(-\frac{E_0^2}{20A^2}\right)} \Rightarrow R = \frac{E_0}{2\sqrt{5}A}$$

ΘΕΜΑ 1 / ε. / (iii)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \{-A[(2x + 4y)\hat{i} + (-2y + 4x)\hat{j} + (2\sqrt{5}z)\hat{k}]\} =$$

$$= -A\epsilon_0 \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x + 4y) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y + 4x) + \frac{\partial}{\partial z}(2\sqrt{5}z)\right] = -A\epsilon_0(2 - 2 + 2\sqrt{5}) \Rightarrow \rho = -2\sqrt{5}A\epsilon_0$$

2ος τρόπος

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow A\frac{\partial}{\partial x}(2x + 4y) + A\frac{\partial}{\partial y}(-2y + 4x) + A\frac{\partial}{\partial z}(2\sqrt{5}z) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A - 2A + 2\sqrt{5}A = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = -2\sqrt{5}A\epsilon_0$$

ΘΕΜΑ 1 / ε. / (iv)

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{encl}}{\epsilon_0} = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} = \frac{-2\sqrt{5}A\epsilon_0 \frac{4}{3}\pi \left(\frac{E_0}{2\sqrt{5}A}\right)^3}{\epsilon_0} =$$

$$= -2\sqrt{5}A \frac{4}{3}\pi \frac{E_0^3}{(2\sqrt{5}A)(2\sqrt{5}A)^2} = -\frac{4}{3}\pi \frac{E_0^3}{4 \cdot 5A^2} \Rightarrow \Phi_E = -\frac{\pi E_0^3}{15A^2}$$

Αν το λύσω με άλλο τρόπο δεν βγαίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Δεν ξέρω γιατί...

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E \uparrow dS} -E_0 \cdot S_{σφαίρας} =$$

$$= -E_0 4\pi R^2 =$$

$$= -E_0 4\pi \left(\frac{E_0}{2\sqrt{5}A}\right)^2 =$$

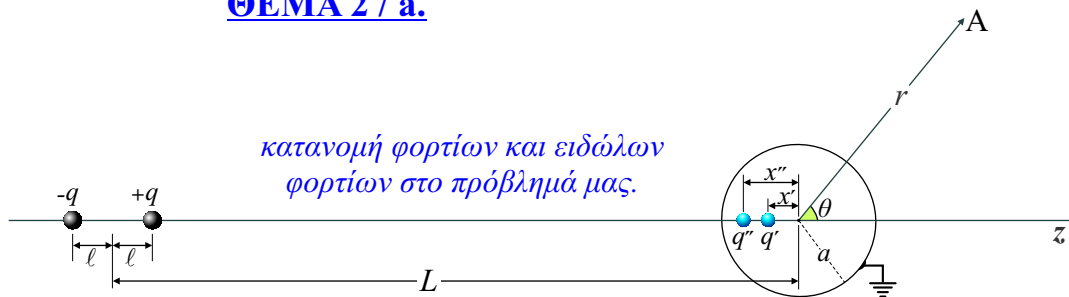
$$= -E_0 4\pi \frac{E_0^2}{20A^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_E = -\frac{\pi E_0^3}{5A^2}$$

ΘΕΜΑ 2 / α.

Γνωρίζουμε ότι η διπολική ροπή είναι διάνυσμα με κατ/ση από ένα φορτίο $-q$ προς ένα φορτίο $+q$ που απέχουν 2ℓ και έχει μέτρο $p=q2\ell$.

$$q = \frac{p}{2\ell}$$



κατανομή φορτίων και ειδώλων φορτίων στο πρόβλημά μας.

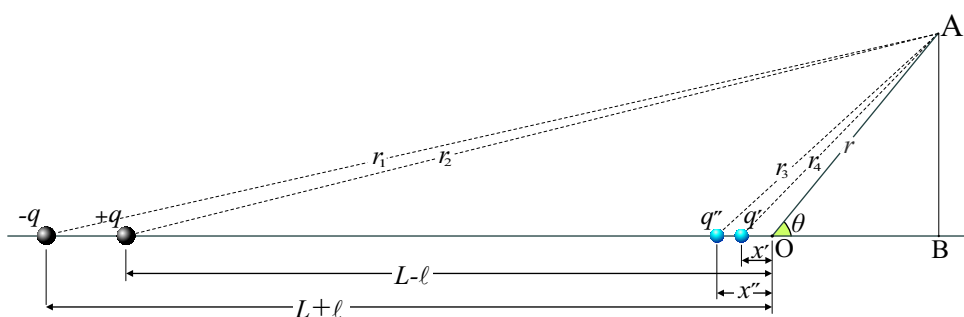
►Σύμφωνα με τη μέθοδο των ειδώλων (εφόσον η σφαίρα είναι γειωμένη $V=0$):

q' : το είδωλο του $-q$
 q'' : το είδωλο του $+q$

$$q' = -\frac{a}{L+\ell}(-q) = \frac{a}{L+\ell}q \quad \dots\dots\dots x' = \frac{a^2}{L+\ell}$$

$$q'' = -\frac{a}{L-\ell}q \quad \dots\dots\dots x'' = \frac{a^2}{L-\ell}$$

ΧΩΡΙΣ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ $L \gg \ell$



$$\cos\theta = \frac{OB}{r} \Rightarrow OB = r \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{AB}{r} \Rightarrow AB = r \sin\theta$$

$$r_1 = \sqrt{AB^2 + [(L+\ell) + OB]^2}$$

$$r_2 = \sqrt{AB^2 + [(L-\ell) + OB]^2}$$

$$r_3 = \sqrt{x''^2 + OB^2}$$

$$r_4 = \sqrt{x'^2 + OB^2}$$

$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{r_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{r_3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r_4} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{a}{r_3(L-\ell)} + \frac{a}{r_4(L+\ell)} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{a}{r_3(L-\ell)} + \frac{a}{r_4(L+\ell)} \right) \xrightarrow{q=p/2\ell}$$

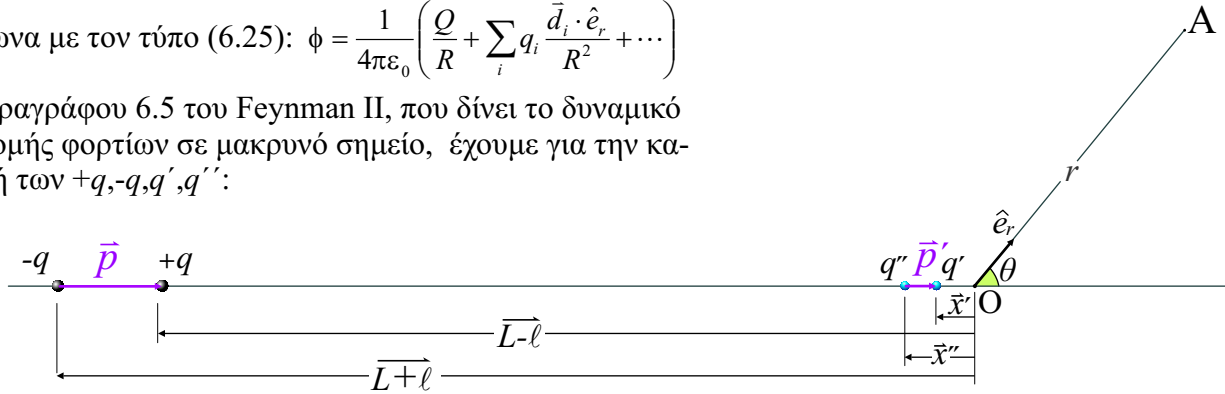
$$\rightarrow \phi_A = \frac{p}{8\pi\epsilon_0\ell} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 \sin^2\theta + (L+\ell+r\cos\theta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 \sin^2\theta + (L-\ell+r\cos\theta)^2}} - \frac{a}{(L-\ell)\sqrt{\frac{a^4}{(L-\ell)^2} + r^2 \cos^2\theta}} + \frac{a}{(L+\ell)\sqrt{\frac{a^4}{(L+\ell)^2} + r^2 \cos^2\theta}} \right]$$



ΜΕ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ $L \gg \ell$

Σύμφωνα με τον τύπο (6.25): $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R} + \sum_i q_i \frac{\vec{d}_i \cdot \hat{e}_r}{R^2} + \dots \right)$

της παραγράφου 6.5 του Feynman II, που δίνει το δυναμικό κατανομής φορτίων σε μακρινό σημείο, έχουμε για την κατανομή των $+q, -q, q', q''$:



$$\begin{aligned} \phi_A^{\text{από το δίπολο}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q-q}{r} + q \frac{(L-\ell)\cos\theta}{r^2} - q \frac{(L+\ell)\cos\theta}{r^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\cos\theta}{r^2} (L-\ell - L-\ell) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\cos\theta}{r^2} 2\ell \xrightarrow{q=p/2\ell} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2} 2\ell \Rightarrow \phi_A^{\text{δίπολο}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_A^{\text{από τα εἰδωλα}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q'+q''}{r} + q'' \frac{\vec{x}'' \cdot \hat{e}_r}{r^2} + q' \frac{\vec{x}' \cdot \hat{e}_r}{r^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{L+\ell} \frac{q}{r} - \frac{a}{L-\ell} \frac{q}{r} - \frac{a}{L-\ell} q \frac{\frac{a^2}{L-\ell} \cos\theta}{r^2} + \frac{a}{L+\ell} q \frac{\frac{a^2}{L+\ell} \cos\theta}{r^2} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a(L-\ell) - a(L+\ell)}{L^2 - \ell^2} q - \frac{a^3 q \cos\theta}{r^2(L-\ell)^2} + \frac{a^3 q \cos\theta}{r^2(L+\ell)^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-2a\ell}{(L^2 - \ell^2)r} q - \frac{a^3 q \cos\theta}{r^2(L-\ell)^2} + \frac{a^3 q \cos\theta}{r^2(L+\ell)^2} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{-2a\ell}{L^2 - \ell^2} - \frac{a^3 \cos\theta}{r(L-\ell)^2} + \frac{a^3 \cos\theta}{r(L+\ell)^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(-\frac{2a\ell}{L^2 - \ell^2} + \frac{a^3 \cos\theta}{r} \left(-\frac{1}{(L-\ell)^2} + \frac{1}{(L+\ell)^2} \right) \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(-\frac{2a\ell}{L^2 - \ell^2} + \frac{a^3 \cos\theta}{r} \frac{(L-\ell)^2 - (L+\ell)^2}{(L-\ell)^2(L+\ell)^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(-\frac{2a\ell}{L^2 - \ell^2} + \frac{a^3 \cos\theta}{r} \frac{\cancel{L^2} + \cancel{\ell^2} - 2L\ell - \cancel{L^2} - \cancel{\ell^2} - 2L\ell}{(L-\ell)^2(L+\ell)^2} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(-\frac{2a\ell}{L^2 - \ell^2} + \frac{a^3 \cos\theta}{r} \frac{(-4L\ell)}{(L-\ell)^2(L+\ell)^2} \right) \xrightarrow{L \gg \ell \Rightarrow L-\ell \approx L+\ell \approx L} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(-\frac{2a\ell}{L^2} + \frac{a^3 \cos\theta}{r} \frac{(-4L\ell)}{L^2 L^2} \right) = \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{2a\ell}{L^2} + \frac{a^3 \cos\theta}{r} \frac{4\ell}{L^3} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{2a\ell}{L^2} \left(1 + \frac{a^2 \cos\theta}{r} \frac{2}{L} \right) \xrightarrow{p=q/2\ell} \phi_A^{\text{εἰδωλα}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pa}{rL^2} \left(1 + \frac{2a^2 \cos\theta}{rL} \right) \end{aligned}$$

Στον ίδιο τύπο καταλήγα ακόμα και αν κάνο τις προσεγγίσεις $\frac{1}{L \pm \ell} \approx \frac{1}{L} \mp \frac{\ell}{L^2}$ παραγράφοντας όρους της μορφής: ℓ/L^2 & ℓ/L^3

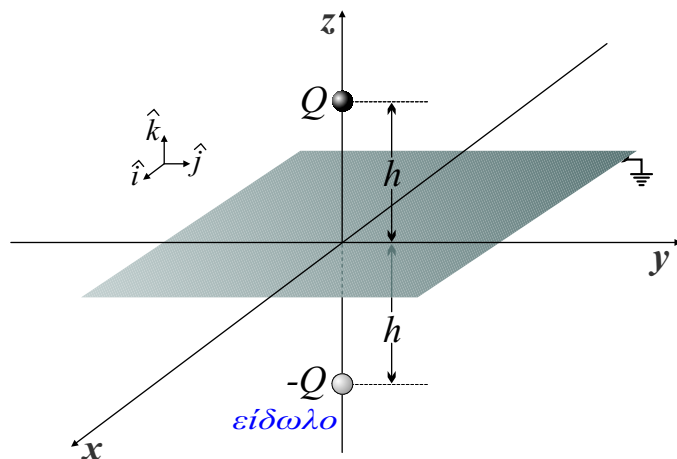
➡ Αρχή της Επαλληλίας: $\phi_A = \phi_A^{\text{δίπολο}} + \phi_A^{\text{εἰδωλα}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pa}{rL^2} \left(1 + \frac{2a^2 \cos\theta}{rL} \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \phi_A = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \left[\cos\theta - \frac{ar}{L^2} \left(1 + \frac{2a^2}{rL} \cos\theta \right) \right]$$

ΘΕΜΑ 2 / b.

Η μέθοδος των ειδώλων μας δημιουργεί ένα φορτίο είδωλο $-Q$ σε απόσταση h κάτω από την επιφάνεια της πλάκας. Σε αυτή την απόσταση, τα δύο φορτία έλκονται με δύναμη *Coulomb* (δύναμη στο Q):

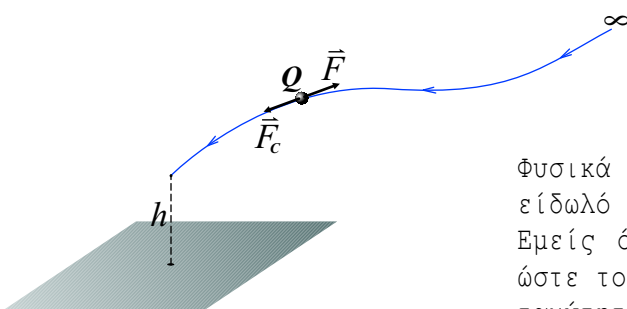
$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2} \hat{k} \xrightarrow{r=2h \text{ \& } Q'=-Q} \vec{F}_C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4h^2} \hat{k}$$



Για να έρθει το Q από το άπειρο στη θέση h (αφού έλκεται και δεν θέλουμε να έρθει με ταχύτητα) θα πρέπει να του ασκούμε συνεχώς μια δύναμη F αντίθετη της F_C άρα:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4h^2} \hat{k} \quad (\text{δύναμη στο } Q, \text{ στη θέση } h)$$

της οποίας το έργο ψάχνουμε: $W_F^{\infty \rightarrow h} = \int_{\infty}^h \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^h \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4h^2} dh = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^h \frac{dh}{h^2} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[\frac{h^{-2+1}}{-2+1} \right]_{\infty}^h = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{h} \right]_{\infty}^h = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\infty} \right) \Rightarrow W_F^{\infty \rightarrow h} = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 h}$



Φυσικά το έργο είναι αρνητικό αφού το φορτίο έλκεται από το είδωλό του άρα αν το αφήσουμε θα πάει αυθόρμητα προς αυτό. Εμείς όμως συνεχώς το “καθηστερούμε” ασκώντας την F έτσι ώστε το Q να πάει από το άπειρο στο h με μηδενική (συνεχώς) ταχύτητα.

Αν αντιστρέψουμε τη μεταφορά και πάρουμε τη δύναμη του πεδίου (δύναμη *Coulomb*) έχουμε:

$$W_{F_C}^{h \rightarrow \infty} \xrightarrow{\substack{(h \rightarrow \infty) = -(\infty \rightarrow h) \\ \vec{F}_C = -\vec{F}}} W_F^{\infty \rightarrow h} \dots \dots \dots \text{άρα : } W_{F_C}^{h \rightarrow \infty} = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 h} \quad \text{έργο “διάλυσης” του συστήματος}$$

➔ Η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια του συστήματος Q και Q' είναι:

$$U = \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(-Q)}{2h} \Rightarrow U = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 h}$$

➔ Παρατηρούμε ότι η ενέργεια είναι διπλάσια του έργου “διάλυσης” (ή αντίστοιχα του έργου της εξωτερικής δύναμης για την συγκρότηση). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για τον υπολογισμό της ηλεκτροστατικής ενέργειας U θεωρήσαμε το Q' ακίνητο και το Q να μεταφέρεται από το άπειρο στο h :

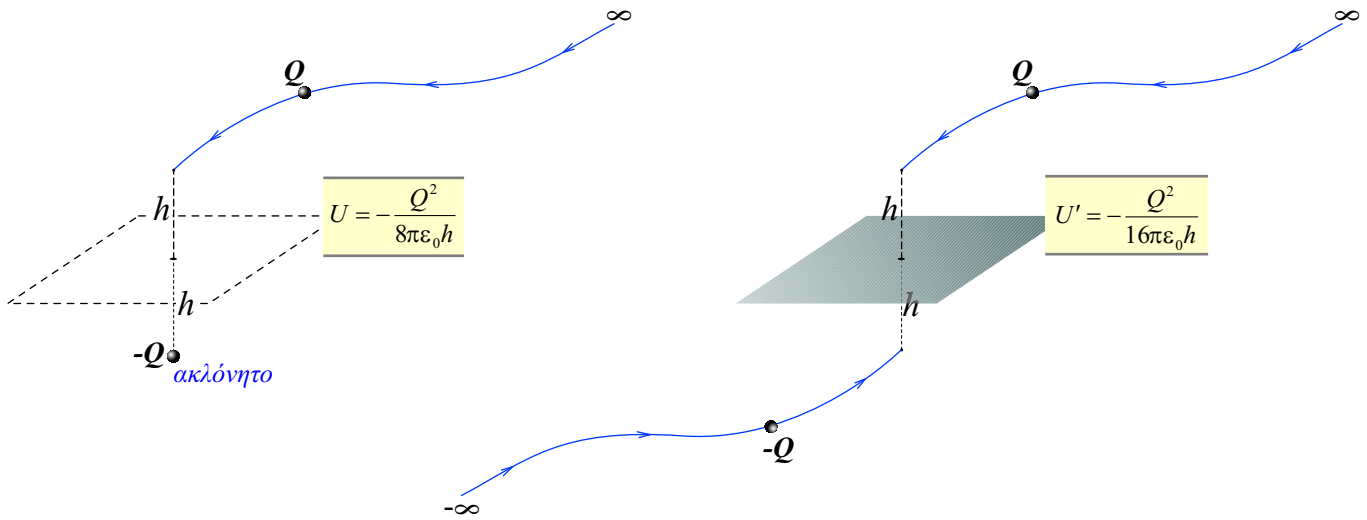
Το πραγματικό φορτίο Q κινείται από το άπειρο στο h , μέσα στο πεδίο που “φτιάχνει” το είδωλο $Q'=-Q$. Το πεδίο αυτό έχει ένταση:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-Q)}{r^2} \hat{r} \longrightarrow E^2 = \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}$$

Η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια του συστήματος των Q και Q' θα είναι:

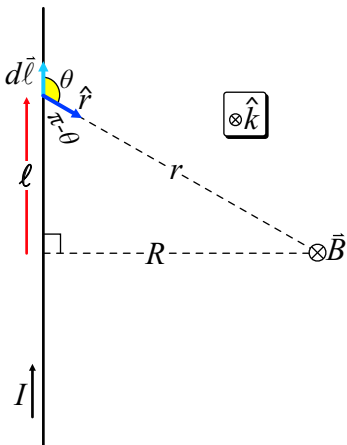
$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty}^h \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2 4\pi}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \int_{\infty}^h \frac{r^2 dr}{r^4} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^h \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^h = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{h} + \frac{1}{\infty} \right] \Rightarrow U = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 h}$$

➔ Όμως στη μέθοδο των ειδώλων, δηλαδή στην κατάσταση του προβλήματός μας, όταν το Q μεταφέρεται από το άπειρο σε απόσταση h από την αγωγίμη πλάκα, το είδωλό του (Q') μετακινείται αντίστοιχα προς το $-h$ κατά την ίδια απόσταση (ξενινώντας από το $-\infty$). Έτσι η συνολική απόσταση που διανύει το Q είναι η μισή, γιατί την άλλη μισή την καλύπτει το είδωλο Q' . Επομένως το υπολογιζόμενο έργο είναι το μισό από το αντίστοιχο που μας αποθηκεύεται ως ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια στην περίπτωση δύο πραγματικών φορτίων Q, Q' .



ΘΕΜΑ 4 / α. / i

▶ Θα αποδείξω πρώτα τον τύπο του μαγνητικού πεδίου σε απόσταση R από ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό απείρου μήκους:



↪ v. Biot-Savart:
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin\theta}{r^2} \hat{k} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(\pi - \theta) &= \frac{R}{r} \quad (*) \\ \cos(\pi - \theta) &= \frac{l}{r} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{(+)} \tan(\pi - \theta) = \frac{R}{l} \Rightarrow -\tan\theta = \frac{R}{l} \Rightarrow l = -\frac{R}{\tan\theta} \\ &\xrightarrow{\frac{d}{d\theta}(-\frac{1}{\tan\theta}) = -\frac{1}{\sin^2\theta}} dl = -R(-\frac{1}{\sin^2\theta})d\theta \Rightarrow dl = \frac{Rd\theta}{\sin^2\theta} \end{aligned} \quad (2)$$

(*): $\sin(\pi - \theta) = \frac{R}{r} \Rightarrow \sin\theta = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{\sin\theta} \quad (3)$

(1)/(2), (3):
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{Rd\theta}{\sin^2\theta} \frac{\sin\theta}{R^2} \hat{k} \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin\theta d\theta \hat{k}$$

...ολοκληρώνοντας για τον άπειρο αγωγό θα έχουμε $\theta=0 \dots \pi$, άρα:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int_0^\pi d\vec{B} = \frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi R} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi R} [-\cos\theta]_0^\pi \\ &= \frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi R} [-\cos\pi + \cos 0] = \frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi R} [-(-1) + 1] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{k}} \quad \dots \text{με μέτρο: } \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}} \quad (4) \end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε και πιο απλά, με τον νόμο του Ampere:

$$\int_c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{encl} \Rightarrow B2\pi R = \mu_0 I \Rightarrow \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}} \quad (4)$$

▶ Στη συνέχεια θα “χωρίσω” το λεπτό αγώγιμο φύλλο απείρου μήκους και πλάτους w σε άπειρους ρευματοφόρους αγωγούς (απείρου μήκους) που ο καθένας τους θα φέρει ένα κλάσμα του ρεύματος:

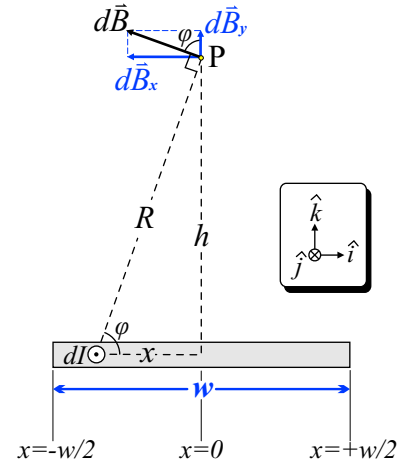
$$dI = \frac{I}{w} dx \quad (5) \quad \text{Θεωρώντας μια “περίεργη” πυκνότητα ρεύματος κατά την } x\text{-διεύθυνση } J=I/w \text{ άρα } dI=Jdx$$

▶ Το κάθε στοιχειώδες ρεύμα dI προκαλεί στο P μια στοιχειώδη ένταση dB . Επειδή όμως το dI δεν βρίσκεται ακριβώς κάτω από το P, η ένταση θα αλλάξει ως εξής:

$$(4): \quad dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi \sqrt{x^2 + h^2}}$$

λόγω συμμετρίας για τα αντιδιαμετρικά (ως προς το κέντρο) στοιχειώδη ρεύματα, οι κατακόρυφες συνιστώσες dB_z του μαγνητικού πεδίου αλληλοεξουδετερώνονται, άρα η συνολική ένταση θα είναι:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int d\vec{B}_x = \int dB \sin\phi(-\hat{i}) = -\hat{i} \int \frac{\mu_0 dI}{2\pi \sqrt{x^2 + h^2}} \frac{h}{R} = \\ &= -\hat{i} \frac{\mu_0 h}{2\pi} \int \frac{dI}{\sqrt{x^2 + h^2} \sqrt{x^2 + h^2}} \xrightarrow{(5)} -\hat{i} \frac{\mu_0 h}{2\pi} \int \frac{\frac{I}{w} dx}{x^2 + h^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{B} &= -\hat{i} \frac{\mu_0 h I}{2\pi w} \int_{-w/2}^{+w/2} \frac{dx}{x^2 + h^2} \xrightarrow{\int \frac{dx}{x^2+h^2} = \frac{1}{h} \tan^{-1} \frac{x}{h}} -\hat{i} \frac{\mu_0 h I}{2\pi w} \frac{1}{h} \tan^{-1} \frac{x}{h} \Big|_{-w/2}^{+w/2} = \\ &= -\hat{i} \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \left[\tan^{-1} \frac{w/2}{h} - \tan^{-1} \frac{(-w/2)}{h} \right] = -\hat{i} \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \left[\tan^{-1} \frac{w/2}{h} + \tan^{-1} \frac{w/2}{h} \right] = \\ &= -\hat{i} \frac{\mu_0 I}{\pi w} \tan^{-1} \frac{w/2}{h} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi w} \tan^{-1} \frac{w}{2h} (-\hat{i})} \end{aligned}$$



ΘΕΜΑ 4 / α. / ii

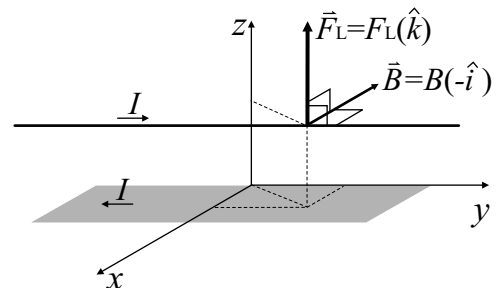
$$\begin{aligned} d\vec{F}_L &= Id\vec{\ell} \times \vec{B} = Id\ell \hat{j} \times B(-\hat{i}) = -Id\ell B(\hat{j} \times \hat{i}) = -Id\ell B(-\hat{k}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{d\vec{F}_L = Id\ell B\hat{k}} \quad (1) \end{aligned}$$

Αφού το καλώδιο είναι στην y -διεύθυνση και το μαγνητικό πεδίο στην x -διεύθυνση, η δύναμη Laplace που δέχεται ένα τμήμα του καλωδίου, μήκους ℓ , θα έχει μέτρο:

$$F_L = BI\ell \Rightarrow \frac{F_L}{\ell} = BI \Rightarrow \boxed{\frac{F_L}{\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi w} \tan^{-1} \frac{w}{2h}}$$

και κατεύθυνση αυτή του μοναδιαίου \hat{k} [όπως φαίνεται από την (1)]. Τελικά η δύναμη ανά μονάδα μήκους είναι:

$$\boxed{\frac{\vec{F}_L}{\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi w} \tan^{-1} \frac{w}{2h} \hat{k}}$$



ΘΕΜΑ 4 / b. / i

$$\left. \begin{aligned} \bullet \bar{J} &= J_0 \hat{k} \\ \bullet \bar{A} &= -\hat{k} \frac{J_0}{4\epsilon_0 c^2} (x^2 + y^2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J} \quad \text{διανυσματική} \\ \text{εξίσωση Poisson} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{A} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(-\hat{k} \frac{J_0}{4\epsilon_0 c^2} (x^2 + y^2) \right) = -\hat{k} \frac{J_0}{4\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (x^2 + y^2) = \\ &= -\hat{k} \frac{J_0}{4\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 + y^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^2 + y^2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (x^2 + y^2) \right) = -\hat{k} \frac{J_0}{4\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2x + \frac{\partial}{\partial y} 2y \right) = \\ &= -\hat{k} \frac{J_0}{4\epsilon_0 c^2} (2 + 2) = -\hat{k} \frac{J_0}{4\epsilon_0 c^2} 4 = -\hat{k} \frac{J_0}{\epsilon_0 c^2} \xrightarrow{c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} -\hat{k} \frac{J_0}{1} = -\hat{k} J_0 \mu_0 \xrightarrow{J = \hat{k} J_0} -\mu_0 \bar{J} \end{aligned}$$

άρα ισχύει η:
 $\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J}$
 που είναι η
 δ.εξ. Poisson

ΘΕΜΑ 4 / b. / ii

$$\rightarrow \bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \dots \bar{A} = -\hat{k} \frac{J_0}{4\epsilon_0 c^2} (x^2 + y^2)$$

$$A_0 = \frac{J_0}{4\epsilon_0 c^2}$$

$$\bar{A} = -\hat{k} A_0 (x^2 + y^2) \rightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 0 \\ A_z = -A_0 (x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \bar{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -A_0(x^2 + y^2) \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -A_0(x^2 + y^2) \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -A_0(x^2 + y^2) \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial y} [-A_0(x^2 + y^2)] - \hat{j} \frac{\partial}{\partial x} [-A_0(x^2 + y^2)] = \hat{i} [-A_0 2y] - \hat{j} [-A_0 2x] = 2A_0 (-y\hat{i} + x\hat{j}) \xrightarrow{A_0 = J_0 / 4\epsilon_0 c^2} \\ &\rightarrow \bar{B} = \frac{J_0}{2\epsilon_0 c^2} (-y\hat{i} + x\hat{j}) \xrightarrow{c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0} \bar{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2} (-y\hat{i} + x\hat{j}) \end{aligned}$$



ΘΕΜΑ 4 / b. / iii

➔ νόμος του Ampère: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 J_0 \hat{k} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mu_0 J_0 \hat{k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ B_x & B_y \end{vmatrix} = \mu_0 J_0 \hat{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{i} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \mu_0 J_0 \hat{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \longrightarrow \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial z} & (1) \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \longrightarrow \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial z} & (2) \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 J_0 \longrightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 J_0 & (3) \end{cases}$$

➔ Παρατηρούμε ότι μια λύση που ικανοποιεί και τις τρεις εξισώσεις (1), (2) και (3) είναι η:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2} (-y \hat{i} + x \hat{j}) \Rightarrow \begin{cases} B_x = -\frac{\mu_0 J_0}{2} y \\ B_y = \frac{\mu_0 J_0}{2} x \\ B_z = 0 \end{cases}$$

πράγματι: $\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \quad / \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \quad / \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \quad / \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$

οπότε οι (1) και (2) ικανοποιούνται αυτόματα (0=0)

και: $\frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{\mu_0 J_0}{2}$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\mu_0 J_0}{2}$$

άρα η (3) δίνει: $\frac{\mu_0 J_0}{2} - \left(-\frac{\mu_0 J_0}{2} \right) = \mu_0 J_0 \Rightarrow \frac{\mu_0 J_0}{2} + \frac{\mu_0 J_0}{2} = \mu_0 J_0 \Rightarrow \mu_0 J_0 = \mu_0 J_0$ ισχύει!

➔ Με την ταύτιση των δύο εκφράσεων των μαγνητικών πεδίων, βλέπουμε την ισοδυναμία των δύο νόμων: της διανυσματικής εξίσωσης Poisson και του νόμου του Ampere.

ΤΕΛΟΣ