ΘΕΡΙΝΟ ΣΧΟΛΕΙΟ 1993

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Ποντίδου Χαριτώ
Καπετανάκης Απόστολος-Ιωσήφ
Νέζης Αναστάσιος
Ραχμανίδης Γεώργιος

Free Electron Lasers

Ιούλιος 1993

L.A.S.E.R. ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

Εισαγωγή

Η βασική ιδέα ενός laser ελευθέρων ηλεκρονίων (free elecron laser,FEL) φαίνεται στο Σχήμα 1.Ειδικότερα αυτό που γίνεται είναι οτι τα ηλεκτρόνια παιρνόντας πάνω από το μεταλλικό grating δημιουργούν μαζί με τις εικόνες τους παλόμενα δίπολα (Σχημα 2).Τα δίπολα αυτά λόγω της ταλάντωσής τους εκπέμπουν ακτινοβολία, που λόγω του ότι η κίνηση είναι σχετικιστική, είναι κατά τη διέυθυνση της κίνησης.

Πεδίο Συντονιστή

Η z-συνιστόσα του ηλ. πεδίου είναι :

$$\mathrm{E}_z(x,z,t) = E_z(x,z)\{e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\}$$

όπου το "πλάτος" $E_z(x,z)$ είναι :

$$E_z(x,z) = E_0 sin[k_x(D-x)] + \sum_{n=1}^{\infty} E_n cos(\frac{2\pi n z}{d}) sinh[k_n(D-x)]$$

για την περιοχή ανάμεσα grating-mirror, ενώ για μέσα στο grating $(x<0)$:

$$E_z(x) = A_0 \frac{sin[k_x(x+b)]}{sin(k_x b)}$$

Αν Ψ μια εκ των συνιστωσών των $\vec{E}, \vec{B}$ τότε η εξίσωση κύματος είναι :

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

όπου με χωρισμό μεταβλητών για το $E_z(x,z,t)$ έχουμε :

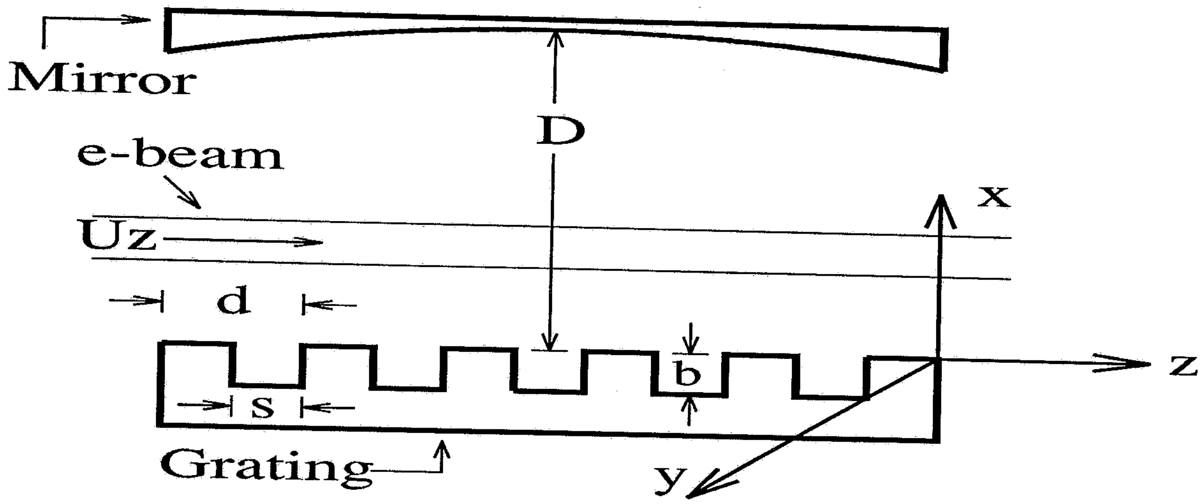
$$\frac{1}{E_z(z)}\frac{d^2}{dz^2}E_z(z) = -k_z^2$$

που έχει λύση :

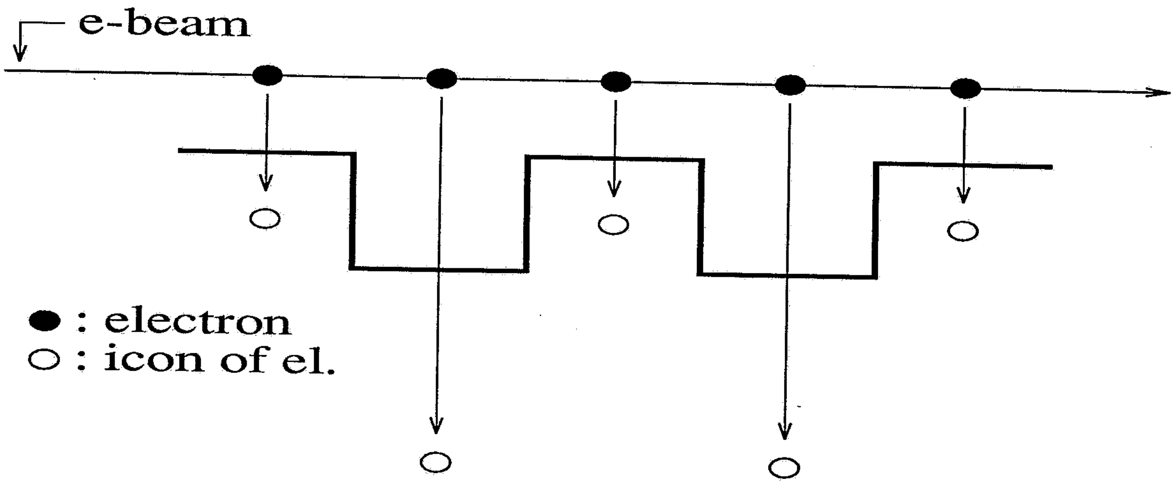
$$E_z(z) = Asin(k_z z) + Bcos(k_z z)$$

Η περιοδικότητα του grating μας δίνει :

$$E_z(z=0) = E_z(z=d) \Rightarrow$$



ΣΧΗΜΑ 1.



ΣΧΗΜΑ 2.

$$B = Asin(k_z d) + Bcos(k_z d) \Rightarrow cos(k_z) = 1 \Rightarrow k_z d = 2\pi n \Rightarrow$$

$$k_z = \frac{2\pi n}{d} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Στην x-διεύθυνση η ταχύτητα του κύματος είναι c (αφού στο είμαστε κενό και δεν έχουμε εμπόδια) άρα :

$$k_x = \frac{\omega}{c}$$

Για να βρούμε το k_n αντικαθιστούμε στην εξίσωση κύματος το μη μηδενικό όρο (n=1,2,...) του $E_z(x, z, t)$ και παίρνουμε :

$$\frac{\partial^2 E_z(x,z,t)}{\partial x^2} = \sum_n E_n cos(\frac{2\pi n z}{d})(-k_n)^2 sinh[k_n(D-x)]\{e^{-i\omega t} + c.c.\}$$

$$\frac{\partial^2 E_z(x,z,t)}{\partial z^2} = \sum_n -E_n(\frac{2\pi n}{d})^2 cos(\frac{2\pi n}{d}) sinh[k_n(D-x)]\{e^{-i\omega t}+c.c.\}$$
$$\frac{\partial^2 E_z(x,z,t)}{\partial t^2} = \sum_n E_n cos(\frac{2\pi n z}{d}) sinh[k_n(D-x)](-i\omega)^2\{e^{-i\omega t}+c.c.\}$$

Αντικαθιστόντας τώρα στην εξ. κύματος παίρνουμε :

$$\sum_n \{k_n^2 \Upsilon - (\frac{2\pi n}{d})^2 \Upsilon + (\frac{\omega}{c})^2 \Upsilon\} = 0$$

όπου $\Upsilon = E_n cos(\frac{2\pi n z}{d}) sinh[k_n(D-x)]\{e^{-i\omega t}+c.c.\}$ και έτσι :

$$k_n^2 - (\frac{2\pi n}{d})^2 + (\frac{\omega}{c})^2 = 0 \Rightarrow$$

$$k_n = \sqrt{(\frac{2\pi n}{d})^2 - k_x^2}$$

Θεωρούμε τον αγωγό από τον οποίο αποτελείται το grating ως τέλειο και έτσι πάνω στην επιφάνειά του τα πεδία $(\vec{E}, \vec{B})$ μηδενίζονται.
'Ετσι από την συνθήκη $E_z(x=0,z)=0$ έχουμε :

$$0 = E_z(0,z) = E_0 sin(k_x D) + \sum_n E_n cos(\frac{2\pi n z}{d}) sinh(k_n D) \Rightarrow$$

$$E_0 sin(k_x D) = -\sum_n E_n cos(\frac{2\pi n z}{d}) sinh(k_n D) = -\sum_n E_n sinh(k_n D)|n>$$

όπου $|n> = cos(\frac{2\pi n z}{d})$
Πολλαπλασιάζουμε τώρα με ένα αντίστοιχο $<m|$ και ολοκληρώνουμε μέσα στο slot (από 0 έως $\frac{s}{2}$ και μετά επί 2) (††) :

$$2E_0 sin(k_x D)\int_0^{s/2} cos(\frac{2\pi n z}{d})dz = -\sum_n E_n sinh(k_n D) <m|n>$$

όπου λόγω της σχέσης του αναπτύγματος Fourier :

$$<m|n> = \frac{1}{(\frac{2}{s})}\delta_{mn}$$

"φεύγει" το άθροισμα και παίρνουμε :

$$-E_m sinh(k_m D)\frac{s}{2} = 2E_0 sin(k_x D)\frac{d}{2\pi m} sin(\frac{2\pi m \frac{s}{2}}{d}) \Rightarrow$$

$$E_m = -2E_0 \frac{sin(s\pi m/d)}{s\pi m/d} \frac{sin(k_x D)}{sinh(k_m D)}$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε την y-συνιστωσά του μαγνητικού πεδίου από την 3^{η} εξίσωση του Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

για $\vec{E} = \hat{k} E_z(x,z)\{e^{-i\omega t} + c.c\}$ έχουμε :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega E_z(x,z)\hat{k}$$

και :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}|_z = \hat{k}(\frac{\partial}{\partial x} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x) = \hat{k} \frac{\partial B_y}{\partial x} \qquad \text{γιατί} B_x = 0$$

'Ετσι το B_y είναι (††):

$$B_y(x,z) = i\omega \int_0^x E_z(x,z)dx =$$

$$= i\omega E_0 \frac{1}{k_x}\{cos[k_x(x-D)] - cos(k_x D)\} + i\omega \sum_n E_n cos(\frac{2\pi n z}{d}) \frac{1}{k_n}\{cosh(Dk_n) - cosh[k_n(x-D)]\}$$

Από μια αντίστοιχη σχέση συνέχειας για το B_y βγάζουμε την ακόλουθη σχέση διασποράς :

$$cot(k_x D) = -\frac{d}{s} cot(k_x b) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_x}{k_n} coth(k_n D)(\frac{sin(\pi n s/d)}{\pi n s/d})^2$$

Τροχιές,Διάδωση δέσμης,Διασπορά ενέργειας

Θέτοντας $\psi_j = \frac{2\pi z_j}{d} - \omega t$ οι εξισώσεις κίνησης του $j^{\sigma\tau o\upsilon}$ ηλεκτρονίου (υποθέτοντας μόνο την n=1 χωρική αρμονική) είναι :

$$\frac{d\psi_j}{dt} = \frac{2\pi c}{d} \beta_{z_j} - \omega$$

Η εξίσωση κίνησης (για n=1) είναι :

$$\frac{dp}{dt} = -|e|E_z^{n=1}(x,z,t) \Rightarrow mU\dot{\gamma} + m\dot{U}\gamma = \mathrm{M}$$

όπου $\mathrm{M} = -|e|E_z^{n=1}(x,z,t)$ και χρησιμοποιώντας την (προφανή) σχέση : $\dot{\gamma} = \gamma^3 c^{-2} U\dot{U}$ $\Rightarrow \gamma U\dot{U} = \dot{\gamma}\gamma^{-2}c^2$ έχουμε :

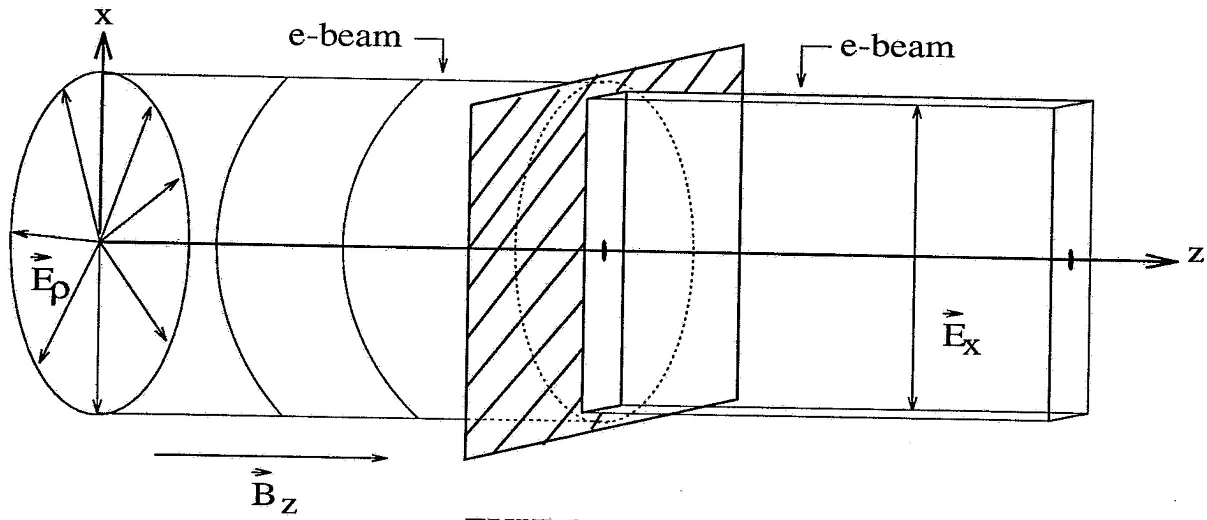
$$\mathrm{M} = mU\dot{\gamma} + m\dot{U}\gamma \Rightarrow \frac{\mathrm{M}\beta}{mc} = \frac{U^2\dot{\gamma}}{c^2} + \frac{\gamma\dot{U}U}{c^2} =$$

$$= \frac{U^2\dot{\gamma}}{c^2} + \frac{\dot{\gamma}c^2}{\gamma^2 c^2} = \dot{\gamma}(\beta^2 + \frac{1}{\gamma^2}) = \dot{\gamma}[\beta^2 + (1-\beta^2)] = \dot{\gamma}$$

'Αρα τελικά :

$$\frac{d\gamma_j}{dt} = -\frac{|e|E_1\beta_{z_j}}{2mc} sinh[k_n(D - x_j)]\{e^{i\Psi_j} + c.c.\}$$

Γυμνή δέσμη (strip beam) ονομάζουμε μια δέσμη που περνά μέσα από μαγνητικό πεδίο, το οποίο είναι κατά την διεύθυνση της διάδωσής της. Ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει μόνο στο εσωτερικό της, λόγω της κατανομής των ηλεκτρονίων.



ΣΧΗΜΑ 3.

Από τον νόμο του Gauss $\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\varrho$ (όπου ϱ η πυκνότητα φορτίου,$\varrho = n_b(-|e|), n_b$: η πυκνότητα της δέσμης) το ηλεκτικό πεδίο για κυλινδρική δέσμη είναι :

$$\vec{E} = -4\pi|e|(x\hat{i} + y\hat{j})n_b$$

Περνάμε τώρα την δέσμη από ένα διάφραγμα (Σχήμα 3) και της "αφήνουμε" μόνο δυο διαστάσεις (x,z).Αντίστοιχα το ηλεκτρικό πεδίο γίνεται :

$$\vec{E} = -4\pi|e|n_b x\hat{i}$$

Αν με άνω δίκτη r συμβολίσουμε το σχετικιστικό (relativistic) όριο τότε είναι εύκολο να δει κανείς πως αλλάζει η n_b στο όριο αυτό :

$$n_b^r = \frac{N}{V^r} = \frac{N}{(xyz)^r} = \frac{N}{xyz^r} = \frac{N}{xy(z\sqrt{1-U_z^2/c^2})} = n_b \gamma_z$$

όπου γ_z ο σχετικιστικός παράγοντας στην z-κατεύθυνση,και N ο (αναλοίωτος) αριθμός σωματιδίων (e^-).

Το ηκεκρικό πεδίο αντίστοιχα σ'αυτό το όριο γίνεται :

$$\vec{E} = -4\pi|e|n_b \frac{1}{\gamma_z^2} x\hat{i}$$

'Ετσι με αυτό το ηλ. πεδίο,με ένα μαγνητικό όπως είπαμε της μορφής $\vec{B} = B_0\hat{k}$ η εξίσωση κίνησης :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -|e|(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{U} \times \vec{B})$$

$$\vec{p} = m\vec{U}\gamma \qquad , \gamma = 1/\sqrt{1-U^2/c^2}$$

μας δίνει :

$$\ddot{x}m\gamma + m\dot{x}\dot{\gamma} = \frac{|e|^2 4\pi n_b}{\gamma_z^2} x - \frac{|e|B_0}{c}\dot{y}$$

αλλά $\dot{\gamma} \sim \dot{U}$ και η ολική ταχύτητα του συστήματος παραμένει σταθερή (το $\vec{B}$ δεν προσδίδει ενέργεια, και το $\vec{E}$ είναι εσωτερικό της δέσμης) άρα $\dot{U} = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = 0$. 'Ετσι :

$$\ddot{x} - \Omega_b^2 x = -\Omega_0 \dot{y}$$

όπου $\Omega_b = \sqrt{\frac{|e|^2 4\pi n_b}{m\gamma\gamma_z^2}}, \Omega_0 = \frac{|e|B_0}{\gamma mc}$.
Με αντίστοιχους συλογισμούς για την y-συνιστώσα έχουμε :

$$\ddot{y}m\gamma + m\dot{y}\dot{\gamma} = \frac{|e|B_0}{c}\dot{x} \Rightarrow \ddot{y} = \Omega_0 \dot{x}$$

Από εδώ και πέρα υποθέτουμε ότι τα ηλεκτρόνια της δέσμης δεν έχουν y-ταχύτητα.'Ετσι θετοντας την y-κανονική ορμή μηδέν έχουμε :

$$p_y = m\gamma(\dot{y} - \Omega_0 x) = 0$$

και η εξίσωση $\ddot{x} - \Omega_b x = -\Omega_0 \dot{y}$ γίνεται :

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0 \qquad , \Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \Omega_b^2}$$

Για να λύσουμε αυτήν την εξίσωση θέτουμε $x(t) \equiv \xi X(t) e^{i\varphi(t)+\theta}$ και με αντικατάσταση (και χωρισμό των X(t) και φ(t)) έχουμε :

$$\ddot{X} - X\dot{\varphi}^2 + \Omega^2 X = 0$$

$$X^2\dot{\varphi} = \epsilon U_z$$

Τα X και φ είναι τα ίδια για όλα τα ηλεκτρόνια.Τα ξ,θ είναι σταθερές που καθορίζουν την κατανομή των ηλεκτρονίων.($0 \le \xi \le 1$ και $0 \le \theta \le 2\pi$) Το ϵ μπορεί να σχετιστεί με την εκπεμψιμότητα της δέσμης.

Αντικαθιστώντας την δεύτερη στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε :

$$\ddot{X} + \Omega^2 X - \frac{\epsilon^2 U_z^2}{X^3} = 0$$

Για μια περιορισμένη (matched) δέσμη το X(t) είναι σταθερό.Αυτό είναι εύκολο να το δούμε, αφού το X(t) ήταν το ¨πλάτος¨ του x(t), και σε μια περιορισμένη δέσμη αύτο το πλάτος δεν πρέπει να παίζει (non-variable).'Ετσι για $X(t) = X_b =$ σταθ. η παραπάνω εξίσωση δίνει : $X_b = \sqrt{\frac{\epsilon U_z}{\Omega}}$ και οι αρχικές εξισώσεις κίνησης γυμνής δέσμης, λύνονται δίνοντας (††):

$$x(t) = \xi\sqrt{\frac{\epsilon U_z}{\Omega}} cos(\Omega t + \theta)$$

$$y(t) = \xi\frac{\Omega_0}{\Omega}\sqrt{\frac{\epsilon U_z}{\Omega}} sin(\Omega t + \theta)$$

Επειδή $U^2 = U_x^2 + U_y^2 + U_z^2$ η διασπορά στην U_z είναι $| < \delta U_z > | \approx \frac{<(U_x^2+U_y^2)>}{2U}$. Το $\delta\gamma_z$ είναι :

$$\delta\gamma_z = \delta(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_z^2}}) = -\frac{1}{2}\gamma_z^3\delta(1-\beta_z^2) = -\frac{1}{2}\gamma_z^3(-2\beta_z)\delta\beta_z \Rightarrow$$

$$\delta\gamma_z = \beta_z\gamma_z^3\delta\beta_z$$

Τα U_x και U_y είναι :

$$U_x = \dot{x} = -\xi X_b \Omega sin(\Omega t + \theta)$$

$$U_y = \dot{y} = \xi X_b \Omega_0 cos(\Omega t + \theta)$$

και επειδή $\Omega^2 = \Omega_0^2 - \Omega_b^2$ έχουμε :

$$U_x^2 + U_y^2 = \xi^2 X_b^2[\Omega_0^2 - \Omega_b^2 sin^2(\Omega t + \theta)]$$

και λόγω του ότι η περίοδος $T = 2\pi/\Omega$ η μέση τιμή του αθροίσματος είναι (††):

$$< U_x^2 + U_y^2 >= \frac{1}{2\pi/\Omega}\int_0^{2\pi/\Omega} X_b^2[\Omega_0^2 - \Omega_b^2 sin^2(\Omega t + \theta)]dt = \frac{1}{2}X_b^2\Omega^2[1 + (\frac{\Omega_0}{\Omega})^2]$$

$$\rightarrow \delta\beta_z = \frac{\delta U_z}{c} = \frac{X_b^2\Omega^2}{4Uc}[1 + (\frac{\Omega_0}{\Omega})^2]$$

και το $\delta\gamma_z$ γίνεται :

$$\delta\gamma_z = \beta_z\gamma_z^3\frac{X_b^2\Omega^2}{4Uc}[1 + (\frac{\Omega_0}{\Omega})^2]$$

$$\delta\gamma_z = \gamma_z^3\frac{X_b\Omega^2}{2c}[1 + (\frac{\Omega_0}{\Omega})^2]\frac{\beta_z}{\beta}$$

και επειδή $\beta_z \sim \beta\frac{\beta_z}{\beta} \sim 1$ έχουμε :

$$\delta\gamma_z = \gamma_z^3\frac{X_b\Omega^2}{2c}[1 + (\frac{\Omega_0}{\Omega})^2]$$

Σημειώνουμε ότι το ξ λόγω του ότι κατανέμεται ομοιόμορφα στο $[0,1]$ "φεύγει" μετά τη μέση τιμή.

Τέλος εύκολα φαίνεται ότι θέτοντας $U_x = U_y = 0$ & $\gamma = \gamma_z$ οι αρχικές μας εξισώσεις κίνησης του $j^{ o\tau o\upsilon}$ ηεκτρονίου συμπυκνώνονται στην εξής :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{\pi|e|E_1}{\gamma_{z_j}md}sinh[k_1(D - x_j)]\{e^{i\psi_j} + c.c.\}$$

'Οσα σημεία έχουν (††) υπολογίστικαν με **MACSYMA**.Τα αρχεία παρατίθενται στο τέλος.

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

1)*Hafizi,Sprangle,Serafim* Phys.Rev.A**45**,12,(1992) p.8846
2)*Colson* Phys.Lett.**64A**,190(1997)
3)*R.K. Wangsness* Electromagnetic Fields
4)*Landau & Lifshitz* The classical theory of fields (Pergamon Press)

MACSYMA CALCULATIONS

```
(C8) D1;

                                 2 %PI N Z
(D8)                         COS(---------)
                                    D
(C9) D2;

                          S
                          -
                          2
                         /
                         [      2 %PI N Z
(D9)                     I  COS(---------) dZ
                         ]          D
                         /
                          0
(C10) D3;

                                %PI N S
                          D SIN(-------)
                                   D
(D10)                     --------------
                             2 %PI N
--------------------------------------------------------------------
(C11) SIN(K*(DD-X));

(D11)                     - SIN(K (X - DD))
(C12) INTEGRATE(%,X,0,X);

Is  X  positive, negative, or zero?
POSITIVE;
                    COS(K X - DD K)    COS(DD K)
(D12)               --------------- - ---------
                           K              K
--------------------------------------------------------------------
(C13) SINH(K*(DD-X));

(D13)                     - SINH(K (X - DD))
(C15) INTEGRATE(D13,X,0,X);

Is  X  positive, negative, or zero?
POSITIVE;
                    COSH(DD K)   COSH(K X - DD K)
(D15)               ---------- - ----------------
                        K               K
--------------------------------------------------------------------
(C16) 1/(2*%PI/W);

                                  W
(D16)                           -----
                                2 %PI
(C17) XB^2*(WO^2-WB^2*SIN(W*T+THETA)^2);

                          2       2                2     2
(D17)                  (WO  - SIN  (T W + THETA) WB ) XB
(C18) INTEGRATE(%,T,0,2*%PI/W);

Is  W  positive or negative?
POSITIVE;
```

(D18)
$$\frac{(2\ \%PI\ WO^2 - \%PI\ WB^2)\ XB^2}{W}$$

```
(C19) D18*D16;
```

(D19)
$$\frac{(2\ \%PI\ WO^2 - \%PI\ WB^2)\ XB^2}{2\ \%PI}$$

```
(C20) FACTOR(%);
```

(D20)
$$\frac{(2\ WO^2 - WB^2)\ XB^2}{2}$$

```
(C20) EQ1:DIFF(X(T),T,2)-WB^2*X(T);
```

(D20)
$$\frac{d^2}{dT^2}(X(T)) - X(T)\ WB^2$$

```
(C21) EQ2:-WO*DIFF(Y(T),T);
```

(D21)
$$-\left(\frac{d}{dT}(Y(T))\right)\ WO$$

```
(C22) EQ1 = EQ2;
```

(D22)
$$\frac{d^2}{dT^2}(X(T)) - X(T)\ WB^2 = -\left(\frac{d}{dT}(Y(T))\right)\ WO$$

```
(C23) EQ3:WO^2*X(T);
```

(D23)
$$X(T)\ WO^2$$

```
(C24) EQ1+EQ3 = EQ2+EQ3;
```

(D24)
$$X(T)\ WO^2 - X(T)\ WB^2 + \frac{d^2}{dT^2}(X(T)) = X(T)\ WO^2 - \left(\frac{d}{dT}(Y(T))\right)\ WO$$

```
(C25) WO*X(T)-DIFF(Y(T),T) = 0;
```

(D25)
$$X(T)\ WO - \frac{d}{dT}(Y(T)) = 0$$

```
(C88) FACTOR(D24);
```

(D88)
$$X(T)\ WO^2 - X(T)\ WB^2 + \frac{d^2}{dT^2}(X(T)) = WO\ \left(X(T)\ WO - \frac{d}{dT}(Y(T))\right)$$

```
(C89) D25;
```

(D89)
$$X(T)\ WO - \frac{d}{dT}(Y(T)) = 0$$

```
(C91) EV(D88,D89);
```

(D91)
$$X(T)\ WO^2 - X(T)\ WB^2 + \frac{d^2}{dT^2}(X(T)) = 0$$

(C99) `WO^2-WB^2 = W^2;`

(D99)
$$WO^2 - WB^2 = W^2$$

(C115) `X(T)*(WO^2-WB^2)+DIFF(X(T),T,2) = 0;`

(D115)
$$X(T)\ (WO^2 - WB^2) + \frac{d^2}{dT^2}(X(T)) = 0$$

(C116) `EV(%,D99);`

(D116)
$$X(T)\ W^2 + \frac{d^2}{dT^2}(X(T)) = 0$$

(C135) `X(T) = \n*K(T)*%E^(%I*\v(T)+\h);`

(D135)
$$X(T) = K(T)\ \%E^{h + \%I\ v(T)}\ n$$

(C136) `EV(D116,%);`

(D136)
$$\frac{d^2}{dT^2}\left(K(T)\ \%E^{h + \%I\ v(T)}\ n\right) + K(T)\ W^2\ \%E^{h + \%I\ v(T)}\ n = 0$$

(C137) `EV(%,DIFF);`

(D137)
$$K(T)\ W^2\ \%E^{h + \%I\ v(T)}\ n + \%I\ K(T)\ \left(\frac{d^2}{dT^2}(v(T))\right)\ \%E^{h + \%I\ v(T)}\ n$$

$$- K(T)\ \left(\frac{d}{dT}(v(T))\right)^2\ \%E^{h + \%I\ v(T)}\ n + 2\ \%I\ \left(\frac{d}{dT}(K(T))\right)\ \left(\frac{d}{dT}(v(T))\right)$$

$$\%E^{h + \%I\ v(T)}\ n + \left(\frac{d^2}{dT^2}(K(T))\right)\ \%E^{h + \%I\ v(T)}\ n = 0$$

(C138) `FACTOR(%);`

(D138)
$$\left(K(T)\ W^2 + \%I\ K(T)\ \left(\frac{d^2}{dT^2}(v(T))\right) - K(T)\ \left(\frac{d}{dT}(v(T))\right)^2\right.$$

$$\left. + 2\ \%I\ \left(\frac{d}{dT}(K(T))\right)\ \left(\frac{d}{dT}(v(T))\right) + \frac{d^2}{dT^2}(K(T))\right)\ \%E^{h + \%I\ v(T)}\ n = 0$$

(C11) `%/(N*%E^(%I*V(T)+H));`

(D11)
$$K(T)\,W^2 + \%I\,K(T)\left(\frac{d^2}{dT^2}(V(T))\right) - K(T)\left(\frac{d}{dT}(V(T))\right)^2 + 2\,\%I\left(\frac{d}{dT}(K(T))\right)\left(\frac{d}{dT}(V(T))\right) + \frac{d^2}{dT^2}(K(T)) = 0$$

(C12) REALPART(%);

(D12)
$$K(T)\,W^2 - K(T)\left(\frac{d}{dT}(V(T))\right)^2 + \frac{d^2}{dT^2}(K(T)) = 0$$

(C13) K(T)^2*DIFF(V(T),T) = G*UZ;

(D13)
$$K^2(T)\left(\frac{d}{dT}(V(T))\right) = G\,UZ$$

(C15) K(T)*W^2-G^2*UZ^2/K(T)^3+DIFF(K(T),T,2) = 0;

(D15)
$$K(T)\,W^2 - \frac{G^2\,UZ^2}{K^3(T)} + \frac{d^2}{dT^2}(K(T)) = 0$$

(C30) D17;

(D30)
$$K(T) = KB$$

(C31) D18;

(D31)
$$KB\,W^2 - \frac{G^2\,UZ^2}{KB^3} + \frac{d^2\,KB}{dT^2} = 0$$

(C33) EV(%,DIFF);

(D33)
$$KB\,W^2 - \frac{G^2\,UZ^2}{KB^3} = 0$$

(C36) SOLVE(%,KB);

(D36)
$$\left[KB = \frac{\%I\ SQRT(G)\ SQRT(UZ)}{SQRT(W)},\ KB = -\frac{SQRT(G)\ SQRT(UZ)}{SQRT(W)},\ KB = -\frac{\%I\ SQRT(G)\ SQRT(UZ)}{SQRT(W)},\ KB = \frac{SQRT(G)\ SQRT(UZ)}{SQRT(W)}\right]$$

(C38) PART(%,4);

(D38)
$$KB = \frac{SQRT(G)\ SQRT(UZ)}{SQRT(W)}$$

(C40) X(T) = N*K(T)*%E^(%I*V(T)+H);

(D40)
$$X(T) = N\,K(T)\,\%E^{\%I\ V(T) + H}$$

(C41) D17;

(D41) $$K(T) = KB$$

(C42) EV(D40,%);

(D42) $$X(T) = KB\ N\ \%E^{\%I\ V(T) + H}$$

(C43) EV(%,D38);

(D43) $$X(T) = \frac{SQRT(G)\ N\ \%E^{\%I\ V(T) + H}\ SQRT(UZ)}{SQRT(W)}$$