Ε.Α.Π.
ΚΦΕ51
2012-2013

Αναστάσιος Νέζης
Α.Μ.: 81717

4η Εργασία

ΘΕΜΑ 3 / a. / (ii)

Σύμβολα και μεγέθη σύμφωνα με την παράγραφο 48-4 του *Feynman*

$$\upsilon_g=\frac{d\omega}{dk}\Rightarrow\frac{1}{\upsilon_g}=\frac{dk}{d\omega}\xrightarrow{k=\frac{n\omega}{c}}\frac{1}{\upsilon_g}=\frac{d\left(\frac{n\omega}{c}\right)}{d\omega}=\frac{1}{c}\frac{d(n\omega)}{d\omega}=\frac{1}{c}\left(n\cancel{\frac{d\omega}{d\omega}}+\omega\frac{dn}{d\omega}\right)=\frac{1}{c}\left(n+\omega\frac{dn}{d\omega}\right)\quad(1)$$

$$\omega=2\pi\nu\quad(2)$$

$$\frac{dn}{d\omega}\xrightarrow{(2)}\frac{dn}{d(2\pi\nu)}=\frac{1}{2\pi}\frac{dn}{d\nu}\quad(3)$$

$$(1)/(2),(3):\ \frac{1}{\upsilon_g}=\frac{1}{c}\left(n+2\pi\nu\frac{1}{2\pi}\frac{dn}{d\nu}\right)\Rightarrow\frac{1}{\upsilon_g}=\frac{1}{c}\left(n+\nu\frac{dn}{d\nu}\right)\quad(4)$$

$$\underbrace{n^2=1-\frac{\nu_0^2}{\nu^2}}_{\text{ΕΚΦΩΝΗΣΗ}}\Rightarrow n=\sqrt{1-\frac{\nu_0^2}{\nu^2}}\Rightarrow\frac{dn}{d\nu}=\frac{1}{2\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}\frac{d}{d\nu}\left(1-\frac{\nu_0^2}{\nu^2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}(-\nu_0^2)\frac{d\nu^{-2}}{d\nu}=\frac{-\nu_0^2}{2\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}(-2)\nu^{-3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dn}{d\nu}=\frac{\nu_0^2}{\nu^3\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}\quad(5)$$

$$(4)/(5):\ \frac{1}{\upsilon_g}=\frac{1}{c}\left(n+\cancel{\nu}\frac{\nu_0^2}{\nu^{\cancel{3}}\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}\right)\xrightarrow{n=\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}\frac{1}{c}\left(\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}+\frac{\nu_0^2/\nu^2}{\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\upsilon_g}=\frac{1}{c}\frac{[\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}\,]^2+\nu_0^2/\nu^2}{\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}=\frac{1-\cancel{\nu_0^2/\nu^2}+\cancel{\nu_0^2/\nu^2}}{c\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}=\frac{1}{c\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}\Rightarrow\boxed{\upsilon_g(\nu)=c\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}\quad(*)$$

Ομαδική Ταχύτητα

$$\left.\begin{aligned}\upsilon_p&=\frac{\omega}{k}\\ k&=\frac{n\omega}{c}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\upsilon_p=\frac{\cancel{\omega}}{\frac{n\cancel{\omega}}{c}}\Rightarrow\upsilon_p=\frac{c}{n}\xrightarrow{n=\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}\boxed{\upsilon_p(\nu)=\frac{c}{\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}}$$

Φασική Ταχύτητα

$\nu_0=10^{17}\ Hz$

$c=3\cdot10^8\ m/s$

$\upsilon_g(\nu)=3\cdot10^8\sqrt{1-10^{34}/\nu^2}$ ..... $\nu\geq4\cdot10^{17}\ Hz$

$\boxed{2.905\cdot10^8\leq\upsilon_g\leq3\cdot10^8\ m/s}$

$\nu_0=10^{17}\ Hz$

$c=3\cdot10^8\ m/s$

$\upsilon_p(\nu)=\dfrac{3\cdot10^8}{\sqrt{1-10^{34}/\nu^2}}$ ..... $\nu\geq4\cdot10^{17}\ Hz$

$\boxed{3\cdot10^8\leq\upsilon_p\leq3.098\cdot10^8\ m/s}$ $\boxed{\upsilon_p>c\ !!!}$

ΘΕΜΑ 3 / a. / (i)

Από την εξίσωση (*) έχουμε:

$$\upsilon_g(\nu)=c\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}\xrightarrow{n=\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}}\boxed{\upsilon_g(n)=c\cdot n}$$

Ή από την εξίσωση (4) έχουμε:

$$\boxed{\upsilon_g(n)=\frac{c}{n+\nu\frac{dn(\nu)}{d\nu}}}$$

Γενική σχέση μεταξύ ομαδικής ταχύτητας και δείκτη διάθλασης (εξαρτώμενο από τη συχνότητα)

ΘΕΜΑ 3 / a. / (iii)

$$\left.\begin{aligned} &\upsilon_p=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega}{n\omega/c}=\frac{c}{n}\\ &\upsilon_g=\frac{c}{n+\nu\dfrac{dn}{d\nu}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \upsilon_p\cdot\upsilon_g=\frac{c^2}{n^2+n\nu\dfrac{dn}{d\nu}}$$

Για να αποδείξουμε ότι $\upsilon_p\cdot\upsilon_g=c^2$ αρκεί να δείξουμε ότι ο παρανομαστής είναι 1. Δηλαδή θα πρέπει:

$$n^2+n\nu\frac{dn}{d\nu}=1\Rightarrow n\nu\frac{dn}{d\nu}=1-n^2\Rightarrow \nu\frac{1}{2}\frac{dn^2}{d\nu}=1-n^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dn^2}{1-n^2}=2\frac{d\nu}{\nu}\Rightarrow-\frac{d(1-n^2)}{1-n^2}=2\frac{d\nu}{\nu}\Rightarrow-\int\frac{d(1-n^2)}{1-n^2}=2\int\frac{d\nu}{\nu}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\ln(1-n^2)=2\ln\nu+C\xrightarrow[\text{ορισμός της σταθεράς ολοκλήρωσης}]{C=-2\ln\nu_0}-\ln(1-n^2)=2\ln\nu-2\ln\nu_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln(1-n^2)=-2\ln\nu+2\ln\nu_0\Rightarrow\ln(1-n^2)=-\ln\nu^2+\ln\nu_0^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln(1-n^2)=\ln\frac{\nu_0^2}{\nu^2}\xrightarrow{e^{\ln(\cdots)}}1-n^2=\frac{\nu_0^2}{\nu^2}\Rightarrow\boxed{n^2=1-\frac{\nu_0^2}{\nu^2}}$$

που ισχύει από την εκφώνηση

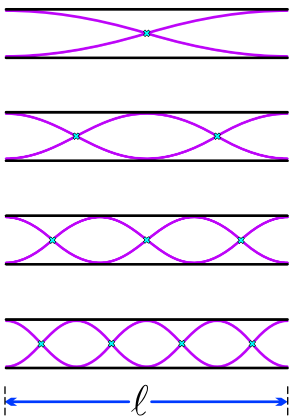
Άρα: $\boxed{\upsilon_p\cdot\upsilon_g=c^2}$

Σύμφωνα με τον Feynman, λόγω των διαφορετικών συχνοτήτων, οι φάσεις έχουν ελαφρά διαφορετικές ταχύτητες (φαινόμενο διασκεδασμού). Αν "καβαλήσουμε" ένα κύμα και ταξιδέψουμε μαζί του, μπορεί κάποια στιγμή να δούμε το άλλο κύμα να μας προσπερνάει. Οι ελαφρά διαφορετικές ταχύτητες και η προαναφερθήσα προσπέραση, μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα της μεγαλύτερης, του φωτός, ταχύτητας.

- Το γεγονός ότι $\upsilon_p>c$ μας λέει ότι οι φάσεις των κυμάτων μπορούν να ταξιδεύουν με ταχύτητες μεγαλύτερες του c. Αυτό όμως δεν παραβιάζει το βασικό αξίωμα της Σχετικότητας διότι το ίδιο το διαμόρφωμα (το κύμα που προύπτει από την υπέρθεση) ταξιδεύει με την ταχύτητα ομάδας $\upsilon_g<c$.

ΘΕΜΑ 3 / b.

Συντονισμός παρατηρείται όταν στον σωλήνα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα με κοιλίες στα δύο άκρα, αφού ο σωλήνας είναι ανοιχτός. Έχουμε τις παρακάτω εικόνες για τους διαδοχικούς συντονισμούς:



Αριθμός Δεσμών	Μήκος Σωλήνα
$1\longrightarrow$	$\ell=2\dfrac{\lambda_1}{4}+0\dfrac{\lambda_1}{2}$
$2\longrightarrow$	$\ell=2\dfrac{\lambda_2}{4}+1\dfrac{\lambda_2}{2}$
$3\longrightarrow$	$\ell=2\dfrac{\lambda_3}{4}+2\dfrac{\lambda_3}{2}$
$4\longrightarrow$	$\ell=2\dfrac{\lambda_4}{4}+3\dfrac{\lambda_4}{2}$
⋮	⋮
$N\longrightarrow$	$\boxed{\ell=2\dfrac{\lambda}{4}+(N-1)\dfrac{\lambda}{2}}$

$$\ell=2\frac{\lambda}{4}+(N-1)\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{2}+(N-1)\frac{\lambda}{2}=(1+N-1)\frac{\lambda}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\ell=N\frac{\lambda}{2}}\xrightarrow{\upsilon=\lambda\nu\Rightarrow\lambda=\upsilon/\nu}\ell=N\frac{\upsilon}{2\nu}\Rightarrow\boxed{\nu=\frac{N\upsilon}{2\ell}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\nu=\frac{N\cdot340}{2\cdot0.5}\Rightarrow\boxed{\nu=340\cdot N}\quad(1)$$

$$1000\ Hz\le\nu\le2000\ Hz\rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)}1000\le340\cdot N\le2000\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1000}{340}\le N\le\frac{2000}{340}\Rightarrow2.94\le N\le5.88\rightarrow$$

$$\xrightarrow{N:\text{ακέραιος}}3\le N\le5\Rightarrow\boxed{N=3,4,5}$$

άρα: (1)

$$\nu_1=340\cdot3\Rightarrow\boxed{\nu_1=1020\ Hz}$$

$$\nu_2=340\cdot4\Rightarrow\boxed{\nu_2=1360\ Hz}$$

$$\nu_3=340\cdot5\Rightarrow\boxed{\nu_3=1700\ Hz}$$

ΘΕΜΑ 4 / a. / (i)

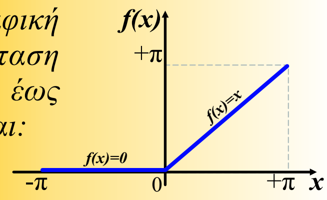
$$f(x)=\begin{cases}0 \quad , & -\pi<x<0\\ x \quad , & 0<x<+\pi\end{cases}$$

...με περίοδο $T=2\pi$

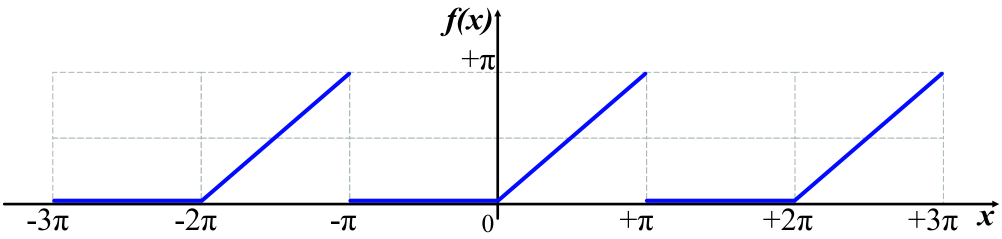
&

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\pi}\Rightarrow \boxed{\omega=1} \quad (1)$$

Η γραφική παράσταση από -π έως +π είναι:



Αφού η σύνάρτηση είναι περιοδική, θα επαναλαμβάνεται πανομοιότυπα πριν το -π και μετά το +π. Άρα για το διάστημα -3π<*x*<+3π θα είναι:



ΘΕΜΑ 4 / a. / (ii)

Για τη σειρά *Fourier* της παραπάνω συνάρτησης: $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega x)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega x)$

θα υπολογίσουμε αρχικά τους συντελεστές: a_0, a_n, b_n:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx}\longrightarrow a_0=\frac{1}{T}\int_{-\pi}^{0}\cancel{0\cdot dx}^{\,0}+\frac{1}{T}\int_0^{+\pi}x\cdot dx=\frac{1}{T}\int_0^{+\pi}x\cdot dx=\frac{1}{T}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{+\pi}=\frac{1}{T}\left(\frac{\pi^2}{2}-0\right)=\frac{\pi^2}{2T}\xrightarrow{T=2\pi}$$

$$\rightarrow a_0=\frac{\pi^2}{2\cdot 2\pi}\Rightarrow \boxed{a_0=\frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx}\xrightarrow{(1):\ \omega=1} a_n=\frac{2}{T}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos(nx)dx}^{\,0}+\int_0^{+\pi}x\cdot\cos(nx)dx\right]=\frac{2}{2\pi}\int_0^{+\pi}x\cdot\cos(nx)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(nx)+\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^{+\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)+\frac{\pi}{n}\cancel{\sin(n\pi)}^{\,0}-\frac{1}{n^2}\cancel{\cos(n0)}^{\,1}-\frac{0}{n}\cancel{\sin(n0)}^{\,0}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)-\frac{1}{n^2}\right]\Rightarrow \boxed{a_n=\frac{1}{n^2\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)-1\right]}$$

$$a_1=\frac{1}{1^2\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(1\pi)-1\right]=\frac{1}{\pi}[-1-1]=-\frac{2}{\pi}\longrightarrow a_1=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{1^2}$$

$$a_2=\frac{1}{2^2\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(2\pi)-1\right]=\frac{1}{4\pi}[1-1]=0\longrightarrow a_2=0$$

$$a_3=\frac{1}{3^2\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(3\pi)-1\right]=\frac{1}{9\pi}[-1-1]=-\frac{2}{9\pi}\longrightarrow a_3=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{3^2}$$

$$a_4=\frac{1}{4^2\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(4\pi)-1\right]=\frac{1}{16\pi}[1-1]=0\longrightarrow a_4=0$$

$$a_5=\frac{1}{5^2\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(5\pi)-1\right]=\frac{1}{25\pi}[-1-1]=-\frac{2}{25\pi}\longrightarrow a_5=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{5^2}$$

$$a_6=\frac{1}{6^2\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(6\pi)-1\right]=\frac{1}{36\pi}[1-1]=0\longrightarrow a_6=0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$a_0=\frac{\pi}{4}$	$n=0$
$a_n=\begin{cases}0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ n:\ \text{άρτιος}\\ -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\ \ldots\ldots\ n:\ \text{περιττός}\end{cases}$	$n\geq 1$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx} \xrightarrow{(1):\ \omega=1} b_n = \frac{2}{T}\left[\int_{-\pi}^{0} \cancelto{0}{0\cdot\sin(nx)dx} + \int_0^{+\pi} x\cdot\sin(nx)dx\right] = \frac{2}{2\pi}\int_0^{+\pi} x\cdot\sin(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin(nx) - \frac{x}{n}\cos(nx)\right]_0^{+\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cancelto{0}{\sin(n\pi)} - \frac{\pi}{n}\cos(n\pi) - \frac{1}{n^2}\cancelto{0}{\sin(n0)} + \frac{0}{n}\cancelto{0}{\cos(n0)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}\left[-\frac{\cancel{\pi}}{n}\cos(n\pi)\right] \Rightarrow \boxed{b_n = -\frac{1}{n}\cos(n\pi)}$$

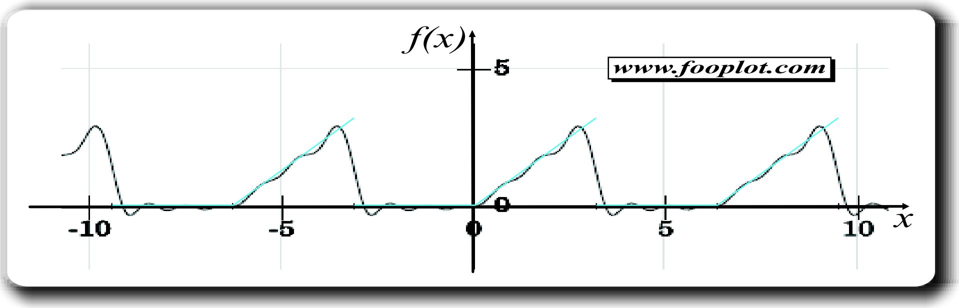
$$b_1 = -\frac{1}{1}\cos(\pi) = -1(-1) = +1 \longrightarrow b_1 = +\frac{1}{1}$$
$$b_2 = -\frac{1}{2}\cos(2\pi) = -\frac{1}{2}(+1) = -\frac{1}{2} \longrightarrow b_2 = -\frac{1}{2}$$
$$b_3 = -\frac{1}{3}\cos(3\pi) = -\frac{1}{3}(-1) = +\frac{1}{3} \longrightarrow b_3 = +\frac{1}{3}$$
$$b_4 = -\frac{1}{4}\cos(4\pi) = -\frac{1}{4}(+1) = -\frac{1}{4} \longrightarrow b_4 = -\frac{1}{4}$$
$$b_5 = -\frac{1}{5}\cos(5\pi) = -\frac{1}{5}(-1) = +\frac{1}{5} \longrightarrow b_5 = +\frac{1}{5}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$b_n = \pm\frac{1}{n}\begin{cases} - & \ldots..\ n:\ \text{άρτιος} \\ + & \ldots..\ n:\ \text{περιττός} \end{cases} \qquad n \geq 1$$

Επομένως η σειρά *Fourier* της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} 0 \ , & -\pi < x < 0 \\ x \ , & 0 < x < +\pi \end{cases}$ με $T = 2\pi$ & $\omega = 1$ είναι:

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \frac{1}{7^2}\cos 7x + \cdots\right) + \left(\frac{1}{1}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \cdots\right)}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης, υπολογίζοντας 6 όρους σε κάθε παρένθεση της σειράς Fourier, φαίνεται δίπλα. Με λεπτή μπλέ γραμμή, είναι η θεωρητική γραφική παράσταση του Θ4/a/i



ΘΕΜΑ 4 / a. / (iii) / 1

Για να μπορέσουμε να αποδείξουμε ότι $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ από την παραπάνω σειρά *Fourier* βλέπουμε ότι πρέπει να μηδενιστεί όλη η 1η παρένθεση που περιέχει τους όρους: $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$
Για να γίνει αυτό επιλέγουμε $x = \pi/2$:

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0 \ , & -\pi < x < 0 \\ x \ , & 0 < x < +\pi \end{cases}$ για $x = \frac{\pi}{2}$ δίνει $\longrightarrow \boxed{f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}}$ (1)

▷Η σειρά *Fourier* για $x=\pi/2$ δίνει:

$$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}+\frac{1}{3^2}\underbrace{\cos 3\frac{\pi}{2}}_{0}+\frac{1}{5^2}\underbrace{\cos 5\frac{\pi}{2}}_{0}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{1}\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1}-\frac{1}{2}\overbrace{\sin 2\frac{\pi}{2}}^{0}+\frac{1}{3}\overbrace{\sin 3\frac{\pi}{2}}^{-1}-\frac{1}{4}\overbrace{\sin 4\frac{\pi}{2}}^{0}+\frac{1}{5}\overbrace{\sin 5\frac{\pi}{2}}^{1}-\cdots\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{1}{1}(+1)-\frac{1}{2}0+\frac{1}{3}(-1)-\frac{1}{4}0+\frac{1}{5}(+1)-\cdots\right)\Rightarrow \boxed{f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots} \quad (2)$$

▷Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\Rightarrow\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\Rightarrow\boxed{\frac{\pi}{4}=+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots}$$

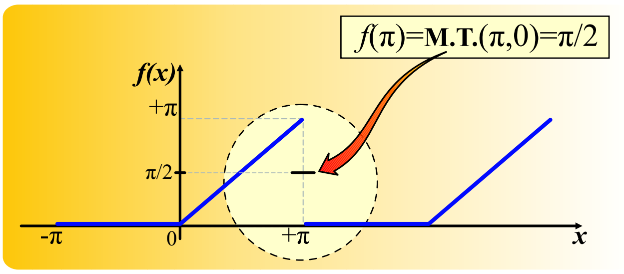
ΘΕΜΑ 4 / a. / (iii) / 2

Ακολουθώνας την ίδια λογική για να αποδείξουμε ότι $\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$ από τη σειρά *Fourier* πρέπει να μηδενιστεί η 2η παρένθεση που περιέχει τους όρους 1,2,3,... Για να γίνει αυτό επιλέγουμε $x=\pi$:

▷Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}0 & , \quad -\pi<x<0\\ x & , \quad 0<x<+\pi\end{cases}$ για $x=\pi$ παρουσιάζει ασυνέχεια. Επομένως η τιμή της σειράς *Fourier* θα είναι η μέση τιμή των τιμών εκατέρωθεν της ασυνέχειας.

Ακριβώς στην τιμή $x=\pi$ <u>και πριν</u> η $f(x)$ είναι: $f(\pi^-)=\pi$. Ακριβώς στην τιμή $x=\pi$ <u>και μετά</u> η $f(x)$ είναι $f(\pi^+)=0$. Άρα η μέση τιμή είναι:

$$f(\pi)=\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{\pi+0}{2}\Rightarrow\boxed{f(\pi)=\frac{\pi}{2}} \quad (3)$$



▷ Η σειρά *Fourier* για $x=\pi$ δίνει:

$$f(\pi)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\overbrace{\cos\pi}^{-1}+\frac{1}{3^2}\overbrace{\cos 3\pi}^{-1}+\frac{1}{5^2}\overbrace{\cos 5\pi}^{-1}+\frac{1}{7^2}\overbrace{\cos 7\pi}^{-1}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{1}\underbrace{\sin\pi}_{0}-\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2\pi}_{0}+\frac{1}{3}\underbrace{\sin 3\pi}_{0}-\frac{1}{4}\underbrace{\sin 4\pi}_{0}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}-\cdots\right)\Rightarrow\boxed{f(\pi)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)} \quad (4)$$

▷Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)\Rightarrow\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)\Rightarrow\boxed{\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots}$$

ΘΕΜΑ 4 / b. / i

Η σχέση διασποράς των κυμάτων στο νερό είναι:

$$\upsilon_p^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho\lambda}\right)\tanh\frac{2\pi h}{\lambda} = \left(\frac{g}{k} + \frac{kT}{\rho}\right)\tanh(kh) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = k^2\left(\frac{g}{k} + \frac{kT}{\rho}\right)\tanh(kh) \Rightarrow \omega = k\sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{kT}{\rho}\right)\tanh(kh)} \quad (\$)$$

$k=2\pi/\lambda$: κυματαριθμός
υ_p : φασική ταχύτητα ($=\omega/k$)
ρ : πυκνότητα νερό
T : επιφανειακή τάση
h : βάθος

Για το τσουνάμι: $\lambda >> h \Rightarrow \frac{1}{\lambda} << \frac{1}{h} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} << \frac{2\pi}{h} \Rightarrow k << \frac{2\pi}{h} \Rightarrow kh << 2\pi \rightarrow \tanh(kh) \approx kh$

Έτσι η παραπάνω σχέση (\$) γίνεται:

$$\omega = k\sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{kT}{\rho}\right)kh} \Rightarrow \boxed{\omega = k\sqrt{gh + k^2\frac{Th}{\rho}}} \xrightarrow{T=0} \boxed{\omega(k) = k\sqrt{gh}}$$

...όπου θεωρήσαμε ότι ο όρος της επιφανειακής τάσης είναι αμελητέος

Για τον υπολογισμό των μεγίστων ενεργειών κάνουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}\delta_x &= 2\delta_{x0}\cos(kx)\sin(\omega t)\\ \delta_y &= 2\delta_{x0}ky\sin(kx)\sin(\omega t)\end{aligned} \quad \xrightarrow[\sin(\omega t)=1]{\max} \quad \begin{aligned}\delta_{x(\max)} &= 2\delta_{x0}\cos(kx) \quad (1)\\ \delta_{y(\max)} &= 2\delta_{x0}ky\sin(kx) \quad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\upsilon_x &= \frac{d\delta_x}{dt} = 2\delta_{x0}\cos(kx)\cdot\omega\cdot\cos(\omega t)\\ \upsilon_y &= \frac{d\delta_y}{dt} = 2\delta_{x0}ky\sin(kx)\cdot\omega\cdot\cos(\omega t)\end{aligned} \quad \xrightarrow[\cos(\omega t)=1]{\max} \quad \begin{aligned}\upsilon_{x(\max)} &= 2\delta_{x0}\omega\cos(kx) \quad (3)\\ \upsilon_{y(\max)} &= 2\delta_{x0}ky\omega\sin(kx) \quad (4)\end{aligned}$$

$$y_{\max}^2 = \delta_{x(\max)}^2 + \delta_{y(\max)}^2 \xrightarrow{(1),(2)} y_{\max}^2 = 4\delta_{x0}^2\cos^2(kx) + 4\delta_{x0}^2k^2y^2\sin^2(kx) \quad (5)$$

$$\upsilon_{\max}^2 = \upsilon_{x(\max)}^2 + \upsilon_{y(\max)}^2 \xrightarrow{(3),(4)} \upsilon_{\max}^2 = 4\delta_{x0}^2\omega^2\cos^2(kx) + 4\delta_{x0}^2k^2y^2\omega^2\sin^2(kx) \quad (6)$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2}Dy_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2y_{\max}^2 \xrightarrow{(5)} U_{\max} = \frac{1}{2}m\omega^2 4\delta_{x0}^2[\cos^2(kx) + k^2y^2\sin^2(kx)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{\max} = 2m\omega^2\delta_{x0}^2[\cos^2(kx) + k^2y^2\sin^2(kx)]} \quad (*)$$

$$K_{\max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 \xrightarrow{(6)} K_{\max} = \frac{1}{2}m4\delta_{x0}^2\omega^2[\cos^2(kx) + k^2y^2\sin^2(kx)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{\max} = 2m\omega^2\delta_{x0}^2[\cos^2(kx) + k^2y^2\sin^2(kx)]} \quad (**)$$

Από τις (*) και (**) βλέπουμε το αναμενόμενο, δηλαδή $K_{\max}=U_{\max}$ (αφού $E=K+U=K_{\max}+0=0+U_{\max}$).

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1 \longrightarrow \frac{4\delta_{x0}^2}{\delta_x^2} + \frac{4\delta_{x0}^2k^2H^2}{\delta_y^2} = 1 \Rightarrow \frac{\cancel{4\delta_{x0}^2}}{\cancel{4\delta_{x0}^2}\cos^2(kx)\sin^2(\omega t)} + \frac{\cancel{4\delta_{x0}^2k^2}H^2}{\cancel{4\delta_{x0}^2k^2}y^2\sin^2(kx)\sin^2(\omega t)} = 1 \Rightarrow$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2(kx)\sin^2(\omega t)} + \frac{H^2/y^2}{\sin^2(kx)\sin^2(\omega t)} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\cos^2(kx)} + \frac{H^2/y^2}{\sin^2(kx)} = \sin^2(\omega t)}$$

ΘΕΜΑ 4 / b. / ii

❱Η σχέση ($) για T=0 γίνεται: $\omega = k\sqrt{\frac{g}{k}\tanh(kh)} = \sqrt{gk\tanh(kh)}$

❱και η ταχύτητα ομάδας θα είναι:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\sqrt{gk\tanh(kh)} \Rightarrow \boxed{\upsilon_g = \frac{1}{2\sqrt{gk\tanh(kh)}}[g\tanh(kh) + gkh\cosh^{-2}(kh)]}$$

❱για τσουνάμι: $\tanh(kh) \to kh$ άρα:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{6h} = \frac{\pi}{3h} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow kh = \frac{\pi}{3} = \frac{3.14}{3} = 1.047$$

$$\upsilon_g = \frac{1}{2\sqrt{gkkh}}[gkh + gkh\cosh^{-2}(kh)] = \frac{g\cancel{k}h}{2\cancel{k}\sqrt{gh}}[1+\cosh^{-2}(kh)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_g = \frac{\sqrt{gh}}{2}[1+\cosh^{-2}(kh)] \Rightarrow\Rightarrow \upsilon_g = \frac{\sqrt{10\cdot 4000}}{2}[1+\cosh^{-2}(1.047)] \Rightarrow \boxed{\upsilon_g \approx 139\ m/s}$$

ΘΕΜΑ 1 / a. / i

Η σχέση (40.9) του *Feynman* μετατρέπεται σε ισότητα με την προσθήκη μιας σταθεράς:

$$f(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z = Ce^{-\frac{m}{2kT}(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)}d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z \qquad (1)$$

Για να βρούμε τη σταθερά C θα “κανονικοποιήσουμε” την παραπάνω εξίσωση:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z = 1} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-\frac{m}{2kT}(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)}d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z = 1 \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{σφαιρικές συντεταγμένες}} C\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_0^{\infty}\upsilon^2 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}d\upsilon\, d(\cos\theta)\, d\phi = 1 \Rightarrow 4\pi C\int_0^{\infty}\upsilon^2 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}d\upsilon = 1 \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(*)} 4\pi C\frac{\sqrt{\pi\left(\frac{2kT}{m}\right)^3}}{4} = 1 \Rightarrow C\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2} = 1 \Rightarrow \boxed{C = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}}$$

Έτσι η (1) γίνεται:

$$f(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)}d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$$

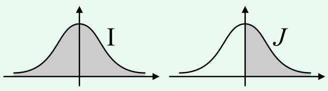
ή
$$\boxed{f(\upsilon)d\upsilon = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\upsilon^2 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}d\upsilon}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ: $\int_0^\infty \upsilon^2 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2} d\upsilon = \frac{1}{4}\sqrt{\pi (2kT/m)^3}$ (*)

- $\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$

- $$\mathrm{I}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ay^2} dx dy \xrightarrow{\text{πολικές συντ.}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-au^2} u du d\theta = 2\pi \int_0^\infty e^{-au^2} u du = \frac{\pi}{a}\int_0^\infty e^{-au^2} d(au^2) = \frac{\pi}{a}\int_0^\infty e^{-x} dx =$$
$$= -\frac{\pi}{a} e^{-x}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{a}(e^{-\infty} + e^0) = \frac{\pi}{a}(0+1) = \frac{\pi}{a} \Rightarrow \mathrm{I} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

- $$J = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{\mathrm{I}}{2} = \frac{\sqrt{\pi/a}}{2}$$



- $$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = -\frac{dJ}{da} = -\frac{d}{da}\frac{\sqrt{\pi/a}}{2} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{da^{-1/2}}{da} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)a^{-1/2-1} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2} = \frac{\sqrt{\pi/a^3}}{4} \quad (2)$$

επομένως:

- $$\int_0^\infty \upsilon^2 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2} d\upsilon \xrightarrow{(2)} \frac{\sqrt{\pi/(m/2kT)^3}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi(2kT/m)^3}$$

ΘΕΜΑ 1 / a. / ii

ΜΕΣΑ ΣΤΟΝ ΘΑΛΑΜΟ

Μέση Ταχύτητα:

$$<\upsilon> = \int_0^\infty \upsilon f(\upsilon) d\upsilon = 4\pi C \int_0^\infty \upsilon^3 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2} d\upsilon = 4\pi C \frac{1}{2}\int_0^\infty \upsilon^2 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2} d\upsilon^2 \xrightarrow{a=m/2kT \ \& \ x=\upsilon^2}$$

$$\rightarrow 2\pi C \int_0^\infty x e^{-ax} dx = -2\pi C \frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-ax} dx = -2\pi C \frac{d}{da}\left(\frac{1}{a}\right) = -2\pi C\left(-\frac{1}{a^2}\right) = \frac{2\pi C}{a^2} \xrightarrow{C=(m/2\pi kT)^{3/2} \ \& \ a=m/2kT}$$

$$\rightarrow 2\pi \frac{(m/2\pi kT)^{3/2}}{(m/2kT)^2} = 2\pi^{-1/2} m^{-1/2} (2kT)^{1/2} \Rightarrow \boxed{<\upsilon>_{\text{μέσα}} = 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}$$

Πιο Πιθανή Ταχύτητα:

$$\frac{df(\upsilon)}{d\upsilon} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\upsilon}\left[4\pi (m/2\pi kT)^{3/2}\upsilon^2 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\upsilon}\left[\upsilon^2 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\upsilon e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2} + \upsilon^2 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}\left(-\frac{m}{\cancel{2}kT}\cancel{2}\upsilon\right) = 0 \Rightarrow 2\cancel{\upsilon}\cancel{e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}} = \frac{m}{kT}\upsilon^{\cancel{3}\,2}\cancel{e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = \frac{2kT}{m} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{\text{μέσα}}^{\text{πιθανή}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}}$$

ΕΞΩ ΑΠ' ΤΟΝ ΘΑΛΑΜΟ

Η κατανομή των ταχυτήτων που διαφεύγουν από την τρύπα είναι: $\boxed{F d\upsilon = N \upsilon^3 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2} d\upsilon}$

N: σταθερά κανονικοποίησης

Μέση Ταχύτητα:

$$<\upsilon> = \int_0^\infty \upsilon F(\upsilon) d\upsilon = N \int_0^\infty \upsilon^4 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2} d\upsilon \quad (1)$$

Το N θα προκύψει από την κανονικοποίηση της $F(\upsilon)$:

$$\int_0^\infty F(\upsilon) d\upsilon = 1 \Rightarrow N \int_0^\infty \upsilon^3 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2} d\upsilon = 1 \Rightarrow N = \frac{1}{\int_0^\infty \upsilon^3 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2} d\upsilon} \quad (2)$$

$$(1)/(2): \; <\upsilon> = \frac{\int_0^\infty \upsilon^4 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2} d\upsilon}{\int_0^\infty \upsilon^3 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2} d\upsilon} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boxed{<\upsilon>_{έξω} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi k T}{2m}}}$$

Πιο Πιθανή Ταχύτητα:

$$\frac{dF(\upsilon)}{d\upsilon} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\upsilon}\left[N \upsilon^3 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}\right] = 0 \Rightarrow N \frac{d}{d\upsilon}\left[\upsilon^3 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\upsilon}\left[\upsilon^3 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\upsilon^2 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2} + \upsilon^3 e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}\left(-\frac{m}{\cancel{2}kT}\cancel{2}\upsilon\right) = 0 \Rightarrow 3\cancel{\upsilon^2} \cancel{e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}} = \frac{m}{kT} \cancel{e^{-\frac{m}{2kT}\upsilon^2}} \upsilon^{\cancel{4}\,2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = \frac{3kT}{m} \Rightarrow \boxed{\upsilon^{πιθανή}_{έξω} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}}$$

ΣΥΓΚΡΙΣΗ:

$$\frac{<\upsilon>_{μέσα}}{<\upsilon>_{έξω}} = \frac{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi k T}{2m}}} = \frac{\sqrt{\frac{8}{\pi}}}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{16}{\pi^2}} = \frac{2}{3}\frac{4}{\pi} \Rightarrow \boxed{\frac{<\upsilon>_{μέσα}}{<\upsilon>_{έξω}} = \frac{8}{3\pi}}$$

$$\frac{\upsilon^{πιθανή}_{μέσα}}{\upsilon^{πιθανή}_{έξω}} = \frac{\sqrt{\frac{2kT}{m}}}{\sqrt{\frac{3kT}{m}}} \Rightarrow \boxed{\frac{\upsilon^{πιθανή}_{μέσα}}{\upsilon^{πιθανή}_{έξω}} = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

ΘΕΜΑ 1 / b. / i

▷ N: αριθμός μορίων του αερίου → N_1: την ενέργεια E_1, N_2: την ενέργεια E_2, N_3: την ενέργεια E_3 $\quad N=N_1+N_2+N_3 \quad (*)$

▷ Σύμφωνα με την κατανομή *Boltzmann* έχουμε:

$$N_2 = N_1 e^{-E_2/kT} = N_1 e^{-\varepsilon/kT}$$
$$N_3 = N_1 e^{-E_3/kT} = N_1 e^{-10\varepsilon/kT}$$
$$(N_1 = N_1 e^{-E_1/kT} = N_1 e^{-0/kT} = N_1)$$

▷ Από την (*) έχουμε:

- $N_1 = N - N_2 - N_3 = N - N_1 e^{-\varepsilon/kT} - N_1 e^{-10\varepsilon/kT} \Rightarrow N_1(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}) = N \Rightarrow \boxed{N_1 = \dfrac{N}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}}} \quad (1)$

- $N_2 = N - N_1 - N_3 = N - N_1 - N_1 e^{-10\varepsilon/kT} = N - N_1(1+e^{-10\varepsilon/kT}) \overset{(1)}{=} N - \dfrac{N(1+e^{-10\varepsilon/kT})}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}} =$

$$= \frac{N(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}) - N(1+e^{-10\varepsilon/kT})}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}} = \frac{N(\cancel{1}+e^{-\varepsilon/kT}+\cancel{e^{-10\varepsilon/kT}}-\cancel{1}-\cancel{e^{-10\varepsilon/kT}})}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N_2 = \frac{Ne^{-\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}}} \quad (2)$$

- $N_3 = N - N_1 - N_2 = N - N_1 - N_1 e^{-\varepsilon/kT} = N - N_1(1+e^{-\varepsilon/kT}) \overset{(1)}{=} N - \dfrac{N(1+e^{-\varepsilon/kT})}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}} =$

$$= \frac{N(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}) - N(1+e^{-\varepsilon/kT})}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}} = \frac{N(\cancel{1}+\cancel{e^{-\varepsilon/kT}}+e^{-10\varepsilon/kT}-\cancel{1}-\cancel{e^{-\varepsilon/kT}})}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N_3 = \frac{Ne^{-10\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}}} \quad (3)$$

▷ Για να είναι μόνο οι δύο πρώτες στάθμες κατειλημμένες θα πρέπει $N_3 \le 1$. Για το άνω όριο θερμοκρασίας T_c θα έχουμε $N_3=1$.

$$N_3 = 1 \xrightarrow{(3)} \frac{Ne^{-10\varepsilon/kT_c}}{1+e^{-\varepsilon/kT_c}+e^{-10\varepsilon/kT_c}} = 1 \Rightarrow Ne^{-10\varepsilon/kT_c} = 1+e^{-\varepsilon/kT_c}+e^{-10\varepsilon/kT_c} \Rightarrow N = e^{10\varepsilon/kT_c}(1+e^{-\varepsilon/kT_c}+e^{-10\varepsilon/kT_c}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = e^{10\varepsilon/kT_c} + e^{10\varepsilon/kT_c}e^{-\varepsilon/kT_c} + \cancel{e^{10\varepsilon/kT_c}}\cancel{e^{-10\varepsilon/kT_c}} \Rightarrow \boxed{N = e^{10\varepsilon/kT_c} + e^{9\varepsilon/kT_c} + 1} \quad (4)$$

▶ Η προηγούμενη εξίσωση (4) για N>>1 έχει κυρίαρχο όρο το $e^{10\varepsilon/kT_c}$ και επομένως γίνεται:

$$N \approx e^{10\varepsilon/kT} \Rightarrow \ln N \approx \frac{10\varepsilon}{kT_c} \Rightarrow \boxed{T_c \approx \frac{10\varepsilon}{k\ln N}} \quad (5)$$

! *Θα ήταν λάθος να προσεγγίσουμε την (4) με:*

$$N \approx 2e^{10\varepsilon/kT} \Rightarrow T_c \approx \frac{10\varepsilon}{k\ln(N/2)}$$

και ένα απλό αριθμητικό παράδειγμα θα μας πείσει:

Για $N \sim 10^{23}$ επιλέγω $\varepsilon/kT = 5.5$

$N_i = e^{10\cdot 5.5} = 7.69\cdot 10^{23}$	Βλέπουμε ότι:
$N_{ii} = 2\cdot e^{10\cdot 5.5} = 1.53\cdot 10^{24}$	$N_i \approx N \quad (\pm 0.38\%)$ ☺
$N = e^{10\cdot 5.5} + e^{9\cdot 5.5} + 1 = 7.72\cdot 10^{23}$	$N_{ii} \approx N \quad (\pm 98.2\%)$ ☠

ΘΕΜΑ 1 / b. / ii

Η μέση ενέργεια του μορίου είναι:

$$< E >= \frac{N_1 \cdot E_1 + N_2 \cdot E_2 + N_3 \cdot E_3}{N} = \frac{N_1 \cdot 0 + N_2 \cdot \varepsilon + N_3 \cdot 10\varepsilon}{N} \xrightarrow{(2),(3)}$$

$$\to \frac{\frac{\cancel{N}e^{-\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}} \cdot \varepsilon + \frac{\cancel{N}e^{-10\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}} \cdot 10\varepsilon}{\cancel{N}} = \frac{\varepsilon \cdot e^{-\varepsilon/kT} + 10\varepsilon \cdot e^{-10\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}} \Rightarrow \boxed{< E >= \varepsilon \cdot \frac{e^{-\varepsilon/kT}+10e^{-10\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}}} \quad (6)$$

ΘΕΜΑ 1 / b. / iii

Η ειδική θερμότητα ανά γραμμομόριο:

$$\boxed{C_v = N_A \frac{\vartheta < E >}{\vartheta T}} \xrightarrow{(6)} N_A \frac{\vartheta}{\vartheta T}\left[\varepsilon \cdot \frac{e^{-\varepsilon/kT}+10e^{-10\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}}\right] = N_A \varepsilon \frac{\Pi \frac{\vartheta A}{\vartheta T} - A \frac{\vartheta \Pi}{\vartheta T}}{\Pi^2} \quad (7)$$

$\mathrm{A} = e^{-\varepsilon/kT} + 10e^{-10\varepsilon/kT}$ ΑΡΙΘΜΗΤΗΣ

ΠΑΡΑΝΟΜΑΣΤΗΣ $\Pi = 1 + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-10\varepsilon/kT}$

$$\frac{\vartheta A}{\vartheta T} = \frac{\vartheta}{\vartheta T}(e^{-\varepsilon/kT}+10e^{-10\varepsilon/kT}) = e^{-\varepsilon/kT}\frac{\vartheta(-\varepsilon/kT)}{\vartheta T} + 10e^{-10\varepsilon/kT}\frac{\vartheta(-10\varepsilon/kT)}{\vartheta T} =$$

$$= e^{-\varepsilon/kT}[-\frac{\varepsilon}{k}(-T)^{-2}] + 10e^{-10\varepsilon/kT}[-\frac{10\varepsilon}{k}(-T)^{-2}] = \frac{\varepsilon \cdot e^{-\varepsilon/kT}}{kT^2} + \frac{100\varepsilon \cdot e^{-10\varepsilon/kT}}{kT^2} = \frac{\varepsilon}{kT^2}(e^{-\varepsilon/kT}+100e^{-10\varepsilon/kT}) \quad (8)$$

$$\frac{\vartheta \Pi}{\vartheta T} = \frac{\vartheta}{\vartheta T}(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT}) = e^{-\varepsilon/kT}\frac{\vartheta(-\varepsilon/kT)}{\vartheta T} + e^{-10\varepsilon/kT}\frac{\vartheta(-10\varepsilon/kT)}{\vartheta T} =$$

$$= e^{-\varepsilon/kT}[-\frac{\varepsilon}{k}(-T)^{-2}] + e^{-10\varepsilon/kT}[-\frac{10\varepsilon}{k}(-T)^{-2}] = \frac{\varepsilon \cdot e^{-\varepsilon/kT}}{kT^2} + \frac{10\varepsilon \cdot e^{-10\varepsilon/kT}}{kT^2} = \frac{\varepsilon}{kT^2}(e^{-\varepsilon/kT}+10e^{-10\varepsilon/kT}) \quad (9)$$

$$(7)/(8),(9): \; C_v = N_A\varepsilon \frac{(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT})\frac{\varepsilon}{kT^2}(e^{-\varepsilon/kT}+100e^{-10\varepsilon/kT}) - (e^{-\varepsilon/kT}+10e^{-10\varepsilon/kT})\frac{\varepsilon}{kT^2}(e^{-\varepsilon/kT}+10e^{-10\varepsilon/kT})}{(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT})^2} =$$

$$= \frac{N_A\varepsilon^2}{kT^2}\frac{(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT})(e^{-\varepsilon/kT}+100e^{-10\varepsilon/kT}) - (e^{-\varepsilon/kT}+10e^{-10\varepsilon/kT})(e^{-\varepsilon/kT}+10e^{-10\varepsilon/kT})}{(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-10\varepsilon/kT})^2} \xrightarrow{\text{ορίζω: } x=-\varepsilon/kT}$$

$$\to C_v = \frac{N_A\varepsilon^2}{kT^2}\frac{(1+e^x+e^{10x})(e^x+100e^{10x}) - (e^x+10e^{10x})(e^x+10e^{10x})}{(1+e^x+e^{10x})^2} =$$

$$= \frac{N_A\varepsilon^2}{kT^2}\frac{e^x + 100e^{10x} + \cancel{e^{2x}} + 100e^{11x} + e^{11x} + \cancel{100e^{20x}} - \cancel{e^{2x}} - 10e^{11x} - 10e^{11x} - \cancel{100e^{20x}}}{(1+e^x+e^{10x})^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_v = \frac{N_A\varepsilon^2}{kT^2}\frac{e^x + 100e^{10x} + 81e^{11x}}{(1+e^x+e^{10x})^2}} \quad \text{...όπου : } \boxed{x = -\varepsilon/kT}$$

Οι ακραίες περιπτώσεις θερμοκρασίας είναι όταν $kT >> \varepsilon$ (*υψηλή θερμοκρασία*) και όταν $kT << \varepsilon$ (*χαμηλή θερμοκρασία*):

Υψηλή Θερμοκρασία:

$$kT >> \varepsilon \Rightarrow \frac{\varepsilon}{kT} << 1 \Rightarrow e^{-\varepsilon/kT} \to 1 \quad (\& \ e^{-10\varepsilon/kT} \to 1,\ e^{-11\varepsilon/kT} \to 1)$$

άρα η ειδική θερμότητα γίνεται:

$$C_v = \frac{N_A \varepsilon^2}{kT^2} \frac{e^{-\varepsilon/kT} + 100 e^{-10\varepsilon/kT} + 81 e^{-11\varepsilon/kT}}{(1 + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-10\varepsilon/kT})^2} \to \frac{N_A \varepsilon^2}{kT^2} \frac{1 + 100\cdot 1 + 81 \cdot 1}{(1+1+1)^2} \Rightarrow \boxed{C_v = \frac{182}{9} \frac{N_A \varepsilon^2}{kT^2}}$$

Χαμηλή Θερμοκρασία:

$$kT << \varepsilon \Rightarrow \frac{\varepsilon}{kT} >> 1 \Rightarrow e^{-10\varepsilon/kT} \to 0 \quad \& \quad e^{-11\varepsilon/kT} \to 0$$

Επίσης και ο όρος $e^{-\varepsilon/kT}$ του παρανομαστή, εφόσον μπαίνει στο τετράγωνο και προστίθεται στο 1 απαλείφεται, δηλαδή:

$$(1 + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-10\varepsilon/kT})^2 \to 1$$

άρα η ειδική θερμότητα γίνεται:

$$C_v = \frac{N_A \varepsilon^2}{kT^2} \frac{e^{-\varepsilon/kT} + 100 e^{-10\varepsilon/kT} + 81 e^{-11\varepsilon/kT}}{(1 + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-10\varepsilon/kT})^2} \to \frac{N_A \varepsilon^2}{kT^2} \frac{e^{-\varepsilon/kT} + 100\cdot 0 + 81 \cdot 0}{1} \Rightarrow \boxed{C_v = \frac{N_A \varepsilon^2}{kT^2} e^{-\varepsilon/kT}}$$

ΤΕΛΟΣ