1ο. Θέμα Μόρια 25

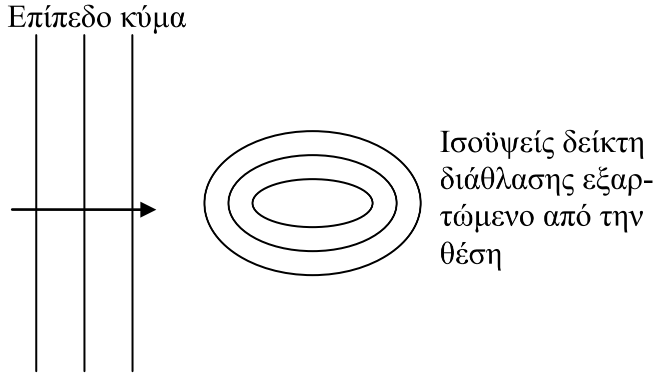
Με τη βοήθεια της αρχής του Fermat να αποδειχθεί:

a.

i. Εξηγείστε περιγραφικά με βάση την περιγραφή του βιβλίου σας την αρχή του Fermat μέσω των πολλαπλών διαδρομών που δύναται να επιλέξει. (4)

ii. Διατυπώστε αναλυτικά τον νόμο του Fermat ως μια ολοκληρωτική σχέση για την διαδρομή που θα επιλέξει μονοχρωματικό φως σε ανομοιογενές υλικό (δηλαδή όταν ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται από την θέση). (4)

iii. Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται ένα επίπεδο κύμα που διαδίδεται στον αέρα προς την φορά του βέλους και συναντά μια περιοχή με μεταβλητό δείκτη διάθλασης από θέση σε θέση. Σχεδιάστε πρόχειρα και εξηγήστε την μορφή που θα πάρει το κύμα.



(4).

b. Για να επιτύχουμε αχρωματικότητα για έναν φακό, ακολουθούμε δύο επιλογές:

i. Δημιουργούμε έναν σύνθετο φακό που αποτελείται από δύο λεπτούς φακούς, όπου ο ένας είναι συμμετρικός αμφίκυρτος, ενώ ο άλλος έχει μια κοίλη επιφάνεια σε πλήρη επαφή την κυρτή του πρώτου. Αν γνωρίζουμε τους δείκτες διάθλασης των δύο φακών για δύο μήκη κύματος και την εστιακή απόσταση του συστήματος, υπολογίστε τις ακτίνες των δύο φακών. (7)

ii. Αν το σύστημα αποτελείται από δύο λεπτούς φακούς με τον ίδιο δείκτη διάθλασης, που απέχουν απόσταση d, βρείτε την σχέση της απόστασης των δύο φακών ως προς τις εστιακές τους αποστάσεις f_a, f_b, ώστε να έχουμε βέλτιστο αποτέλεσμα (να μην υπάρχει εξάρτηση από την τιμή του δείκτη διάθλασης). (6)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

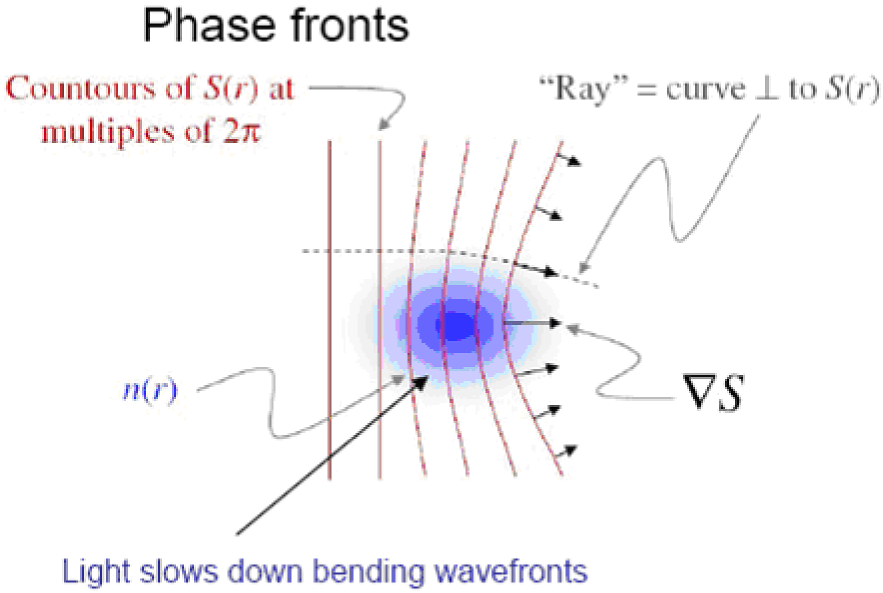
(a)

(i) Παράγραφος 26-6

(ii) Θα πρέπει η φάση, που είναι ανάλογη του χρόνου, να λαμβάνει ακρότατη τιμή. Η φάση θ στην γενική περίπτωση θα δίνεται από την σχέση $\theta = \int \vec{k} \cdot d\vec{l}$, όπου $\vec{k}$ είναι ο κυματαριθμός (που θα αλλάζει από θέση σε θέση) και $d\vec{l}$ η στοιχειώδης τροχιά. Για να είναι ακρότατο θα πρέπει $\delta\theta = \delta\int \vec{k}\cdot d\vec{l} = 0$. Όμως, $\upsilon = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{k} = \frac{\omega n}{c}\hat{k}$. Οπότε θα πρέπει

$\delta\theta = \frac{\omega}{c}\delta\int n\cdot dl = 0$, που δίνει τον νόμο του Fermat για ανομοιογενές υλικό

(iii) Εξ αιτίας του υλικού με δείκτη διάθλασης n, η περιοχή του κύματος που συναντά το υλικό θα κινείται με μικρότερη ταχύτητα από τα άκρα του κύματος με αποτέλεσμα να καθυστερεί ως προς τα άκρα. Έτσι το κύμα θα καμπυλωθεί και θα πάρει την μορφή του παρακάτω σχήματος.



B)

(i) Σύστημα δύο φακών σε επαφή αντιστοιχεί με

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_a} + \frac{1}{f_b} = (n_a - 1)\left[\frac{1}{R_{1a}} - \frac{1}{R_{2a}}\right] + (n_b - 1)\left[\frac{1}{R_{1b}} - \frac{1}{R_{2b}}\right]$$

Θα ισχύει ότι $R_{1a} = -R_{2a} = R$ και $R_{2a} = R_{1b} = -R$

Θέτοντας $R_{2b} = r$ οδηγούμαστε στη σχέση

$$\frac{1}{f} = (n_a - 1)\left[\frac{2}{R}\right] + (n_b - 1)\left[-\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right] = (2n_a - n_b - 1)\left[\frac{1}{R}\right] - (n_b - 1)\left[\frac{1}{r}\right]$$

ανάμεσα στις ακτίνες καμπυλότητας R και r.

Θα πρέπει αυτή η σχέση να ισχύει για δύο ακραία μήκη κύματος π.χ. το κόκκινο (κ) και το μπλε (μ), δηλαδή να ισχύει ότι

$$\frac{1}{f} = (2n_a^\kappa - n_b^\kappa - 1)\left[\frac{1}{R}\right] - (n_b^\kappa - 1)\left[\frac{1}{r}\right] = (2n_a^\mu - n_b^\mu - 1)\left[\frac{1}{R}\right] - (n_b^\mu - 1)\left[\frac{1}{r}\right]$$

Που αποτελεί ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων καταλήγει στην σχέση

$$D = (2n_a^\kappa - n_b^\kappa - 1)(n_b^\mu - 1) - (2n_a^\mu - n_b^\mu - 1)(n_b^\kappa - 1) =$$

$$= 2\left[n_a^\mu n_b^\kappa - n_a^\kappa n_b^\mu + (n_a^\kappa - n_a^\mu) - (n_b^\kappa - n_b^\mu)\right]$$

Ο συνδυασμός των δύο εξισώσεων μας δίνει την λύση για τις δύο ακτίνες

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{f}\frac{n_b^\kappa - n_b^\mu}{D}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{f}\frac{2(n_a^\kappa - n_a^\mu) - (n_b^\kappa - n_b^\mu)}{D}$$

(ii) Το σύστημα των δύο λεπτών φακών εστιακής απόστασης f_a και f_b, που απέχουν απόσταση d, ισοδυναμεί με έναν φακό εστιακής απόστασης f ίσης προς

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_a}+\frac{1}{f_b}-\frac{d}{f_a f_b}$$

Αν n είναι ο δείκτης διάθλασης των δύο φακών και $R_{1a}, R_{2a}, R_{1b}, R_{2b}$ οι ακτίνες καμπυλότητας, τότε θα ισχύει ότι

$$\frac{1}{f_a}=(n-1)\left[\frac{1}{R_{1a}}-\frac{1}{R_{2a}}\right]=(n-1)K_a, \quad \frac{1}{f_b}=(n-1)\left[\frac{1}{R_{1b}}-\frac{1}{R_{2b}}\right]=(n-1)K_b$$

Οπότε

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left[K_a+K_b\right]-d(n-1)^2 K_a K_b$$

Θα είναι ανεξάρτητο του δείκτη διάθλασης όταν

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{f}\right)=K_a+K_b-2d(n-1)K_a K_b=0$$

Που ισχύει όταν

$$d=\frac{K_a+K_b}{2(n-1)K_a K_b}=\frac{(n-1)\left[K_a+K_b\right]}{2(n-1)^2 K_a K_b}=\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{f_a}+\frac{1}{f_b}}{\frac{1}{f_a f_b}}=\frac{f_a+f_b}{2}$$

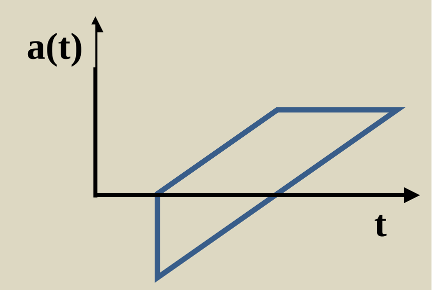
2ο. Θέμα **Μόρια 25**

a.

i. Ένα σύστημα στρατιωτικού Radar (λ = 1cm) θα πρέπει να αναγνωρίζει το εγκάρσιο ίχνος ενός αεροσκάφους από κάθετη απόσταση 10 Km με διακριτική ικανότητα 1 m. Θεωρώντας ότι η κεραία του Radar είναι παραβολική να προσδιοριστεί η διάμετρός της. (3)

ii. Να σχολιασθεί το αποτέλεσμα και να προταθεί μια μέθοδος επίλυσης του προβλήματος ως και τα πιθανά αναφυόμενα προβλήματα. (6)

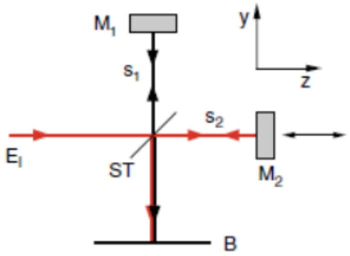
iii. Με βάση την παράγραφο 29-1 να σχεδιάσετε για μεταγενέστερους χρόνους το ηλεκτρικό πεδίο σα συνάρτηση της θέσεως (σε μεγάλη απόσταση) αν η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης του ηλεκτρικού φορτίου ως συνάρτηση του χρόνου περιγράφεται από το διπλανό σχήμα. (4)



b. Να δειχθεί ότι το συμβολόμετρο Michelson μπορεί να χρησιμοποιηθεί

i. ως "συσκευή επιλεκτικής ανακλαστικότητας", δηλ. ότι η ανακλαστικότητα εξαρτάται από το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. (Θεωρείστε ότι ο διαχωριστής ST έχει ανακλαστικότητα εντάσεως R και διαπερατότητας εντάσεως T και ότι τα κάτοπτρα M_1 και M_2 εισάγουν στη δέσμη $E = A\cos(kz - \omega t)$ κατά την ανάκλασή της σε αυτά φάσεις φ_1 και φ_2 αντίστοιχα. (8)

ii. ως ακριβής διάταξη μέτρησης του μήκους κύματος μιας ακτινοβολίας. (4)



<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

(a)

(i)

Από τα δεδομένα συνάγεται ότι η ελάχιστη γωνιακή διακριτική ικανότητα του Radar θα πρέπει να ισούται με

$$\delta_{\min} = \frac{\Delta x}{r} = \frac{1m}{10Km} = 10^{-4} rad \qquad (1)$$

Αφού η κεραία είναι παραβολική το άνοιγμα που κατευθύνεται προς το Radar η φαινομένη επιφάνεια θα είναι κυκλικός δίσκος ο οποίος θα εκπέμπει και θα συλλέγει μόνο την ανακλώμενη ακτινοβολία που εισέρχεται σε αυτόν. Δηλαδή έχουμε το φαινόμενο της περίθλασης από έναν κυκλικό άνοιγμα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ένα σημείο του αεροσκάφους να μην απεικονίζεται ως σημείο αλλά ως ένα δίσκος. (Δίσκος Airy).

Από το κριτήριο του Rayleigh (Σχήμα 30.6) γνωρίζουμε ότι δύο σημεία είναι διακριτά αν το μέγιστο του ενός συμπίπτει με το ελάχιστο (ακτίνα του δίσκου του Airy) του άλλου, δηλαδή αν η γωνιακή τους "απόσταση" ισούται με

$$\theta_{\min} = 1.22\frac{\lambda}{D} \qquad (2)$$

(βλέπε περίπου μέσον σελίδας 30-7)

Από τις (1) και (2) συνάγεται ότι για έχουμε την επιθυμητή διακριτική ικανότητα θα πρέπει $\theta_{min} \leq \ \delta_{min}$, δηλ

$$\theta_{\min} = 1.22\frac{\lambda}{D} \leq \delta_{\min} \quad \Rightarrow D \geq 1.22\frac{\lambda}{\delta_{\min}} \geq 1.22\frac{\lambda r}{\Delta x \delta_{\min}} \geq 1.22\frac{10^{-2}m\,10^{4}m}{1m} \geq 122m \qquad (3)$$

Προφανώς μια τέτοια κεραία δεν είναι δυνατόν να είναι λειτουργική ακόμη και αν κατασκευασθεί.

(ii)

Μια λύση θα ήταν η μείωση του μήκους κύματος της χρησιμοποιούμενης ακτινοβολίας. Όμως τα μικρότερα μήκη κύματος απορροφούνται ή σκεδάζονται ισχυρά από την ατμόσφαιρα.

Η μόνη δυνατή λύση είναι να αναπτύξουμε μια συστοιχία τέτοιων κεραιών (θεωρώντας την έκταση των κεραιών ως μικρή σχετικά με την μεταξύ των απόσταση), δηλαδή να κάνουμε ένα "φράγμα" από ***συγχρονισμένες*** κεραίες (δηλ. να έχουν την ίδια φάση μεταξύ των) σε ***σταθερή απόσταση*** μεταξύ των. (Βλέπε σχήμα 30.3). Αν εμφανίζουν διαφορά φάσεως μεταξύ των (έστω και σταθερά) τότε το μέγιστο συμβολής (περιθλάσεως) δεν εμφανίζεται περί την "γωνία σκοπεύσεως" αλλά είναι μετατοπισμένο (βλέπε σχέση 30.4).

Στις συγχρονισμένες κεραίες η γωνία μεταξύ των κυρίων μεγίστων (βλέπε σχέση 30.5) θα ισούται με

$$nd\sin\theta = \lambda \qquad \theta \approx \sin\theta = \frac{\lambda}{nd} \quad \Rightarrow \quad \delta_{\min} = \frac{\lambda}{nd} = \frac{\lambda}{L} \qquad (4)$$

Όπου d η μεταξύ των απόσταση και n ο αριθμός των κεραιών και L ένα ενεργό "μήκος". Συνεπώς μπορούμε να πετύχουμε την επιθυμητή διακριτική ικανότητα ρυθμίζοντας είτε την μεταξύ των απόσταση είτε τον αριθμό των κεραιών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα έχουμε

$$L = nd = \frac{\lambda r}{\Delta x} = \frac{10^{-2}m \cdot 10^{4}m}{1m} = 100m \qquad (5)$$

Ανεξάρτητα από τη διάμετρο της κεραίας . (αναμενόμενο αφού θέσαμε $L = (n-1)d + nD \approx nd$) Το L είναι ένα ενεργό "μήκος" (ενεργός διάμετρος) .

Στη πραγματικότητα το σύνολο το κεραιών δρα ως μία κεραία διαμέτρου 122 m.

<u>Προσοχή μόνο ως προς τη διακριτική ικανότητα</u>. Και αυτό επειδή εκτός όμως από την απόσταση των κεραιών δεν θα πρέπει να ξεχνάμε και τη συγκέντρωση της ακτινοβολίας (αριθμός κεραιών). Για να μπορέσουμε να εκμεταλλευτούμε την υψηλή διακριτική ικανότητα του συστήματος των κεραιών θα πρέπει να έχουμε επαρκή αριθμό κεραιών (η ένταση του μεγίστου συμβολής είναι ανάλογος του τετραγώνου αριθμού των κεραιών, δηλ. ~ του n^2 και το εύρος του αντιστρόφως ανάλογο του n, σχήματα 30.2 και 303). Προφανώς από τα παραπάνω συνάγεται ότι αν διαιρέσουμε την διάμετρο κατά n φορές θα πρέπει να πάρουμε n^2 κεραίες διαμέτρου d =D/n για να πάρουμε την ίδια ένταση και όχι n.

Στη πράξη το επιτυγχάνουμε χρησιμοποιώντας μερικές κεραίες (3 έως 4) και σε απόσταση 50 έως 100 m.

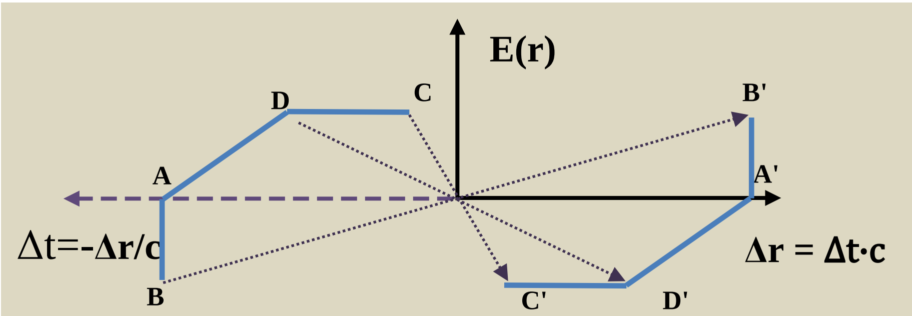
Για λόγους ενημέρωσης στα κατοπτρικά αστρονομικά ραδιοτηλεσκόπια (The Karl G. Jansky Very Large Array (VLA) Plains of San Agustin, Socorro, New Mexico, USA) χρησιμοποιούνται έως και 27 ανεξάρτητες κεραίες διαμέτρου 25 m που μπορούν να διαταχθούν σε μια απόσταση 36 Km (base line) με διακριτική ικανότητα 0,05 λεπτά της μοίρας (=0,05/60 μοίρες) με λ = 7 mm. Λειτουργεί από 400 έως ο,7 cm.

Σημειώστε ότι τα παραπάνω αναφέρονται στην εγκάρσια διακριτική ικανότητα. Η διαμήκης (κατά τη διεύθυνση της παρατήρηση) επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της παλμικής εκπομπής και ανίχνευσης.

Προφανώς λεπτομερέστερη ανάλυση εμπλέκει και τις δύο και τις δύο διακριτικές ικανότητες, τα χαρακτηριστικά του παλμού και την διεύθυνση παρατήρησης.

(iii)

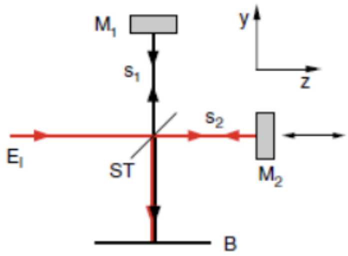
Η χρονική μεταβολή της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου θα δίδεται από το σχήμα, το οποίο όπως συνάγεται από το σχήμα 29-3 και από την τρίτη παράγραφο της σελίδας 29-1, θα προκύπτει από την αντιστροφή και αναστροφή της επιτάχυνσης. Παρατηρείστε ότι οι δύο παραπάνω διαδικασίες ισοδυναμούν με εφαρμογή της συμμετρίας κέντρου αντιστροφής στην αρχή των αξόνων.



(b)

(i)

Για να δείξουμε ότι η ανακλαστικότητα εξαρτάται από το μήκος κύματος, θα υπολογίσουμε την διαπερατότητα I_T σα συνάρτηση του λ ή ισοδύναμα από τη διαφορά οπτικού δρόμου των δύο δεσμών (μετρούμενη σε μήκη κύματος λ). Με βάση τα δεδομένα για την προσπίπτουσα ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα έχουμε.



$$E(z,t) = A\cos(kz - \omega t) \qquad (1)$$

Αφού η ανακλαστικότητα και η διαπερατότητα έντασης δέσμης του διαχωριστή είναι R και T αντίστοιχα, οι εντάσεις του ηλεκτρικού πεδίου των δεσμών που ανακλώνται στα κάτοπτρα 1 και 2 θα ισούνται με

$$E_1 = \sqrt{RT}A\cos(kz - \omega t + \varphi_1) \qquad (2)$$

$$E_2 = \sqrt{RT}A\cos(kz - \omega t + \varphi_2) \qquad (3)$$

καθόσον κάθε μία περνά μια φορά τον διαχωριστή και ανακλάται επίσης μια φορά σε αυτόν.

Συνεπώς η συνολική ένταση της δέσμης στο επίπεδο B θα ισούται με

$$I = c\varepsilon_0(E_1 + E_2)^2 = c\varepsilon_0 RTA^2[\cos(kz_1 - \omega t + \varphi_1) + \cos(kz_2 - \omega t + \varphi_2)]^2 \quad (3)$$

Επειδή ο ανιχνευτής μετρά για χρόνους τ πολύ μεγαλύτερους από την περίοδο ταλαντώσεως T =2π/ω θα έχουμε.

$$< \sin^2 \omega t > \equiv \frac{1}{\tau}\int_{2\pi/\omega}^{2\pi/\omega+\tau} \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{\tau}\int_{2\pi/\omega}^{2\pi/\omega+\tau} \frac{1-\cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2} = < \cos^2 \omega t >$$

$$< \cos(\omega t + (z_1 + z_2)\cdot \boldsymbol{r} + (\varphi_1 \pm \varphi_2) > = 0 \qquad (4)$$

Επίσης με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$\cos\theta \cos\varphi = \frac{\cos(\theta-\varphi)+\cos(\theta+\varphi)}{2} \qquad (5)$$

βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &2\left\langle \cos[k\cdot z_1 - \omega t + \varphi_1]\cos[k\cdot z_2 - \omega t + \varphi_2]\right\rangle \\ &= \left\langle \cos[(z_1 - z_2)k + (\varphi_1 - \varphi_2)] + \cancel{\cos[(z_1 + z_2)k + (\varphi_1 + \varphi_2) - 2\omega t]}^{\,0} \right\rangle \qquad (6) \\ &= \cos[(z_1 - z_2)k + (\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια των (4), (5) και (6) η (3) δίδει

$$\begin{aligned} &I = c\varepsilon_0 RTA^2[1+\cos[(z_1 - z_2)k + (\varphi_1 - \varphi_2)]] = I_0[1+\cos\Delta\varphi] \quad \mu\varepsilon \\ &I_0 = c\varepsilon_0 RTA^2 \qquad (7) \\ &\Delta\varphi = (z_1 - z_2)k + (\varphi_1 - \varphi_2) = (z_1 - z_2)k + \Delta\Phi \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της (7) συναρτήσει του Δφ για δύο τιμές της ΔΦ παριστάνεται στο παρακάτω σχήμα, το Δz θα ισούται με

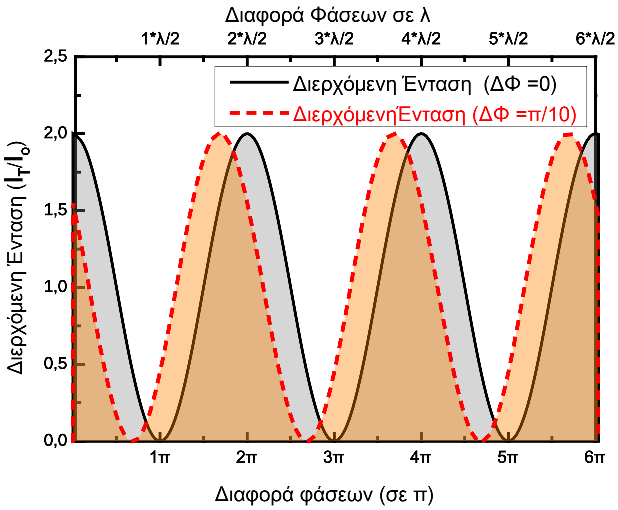
$$\Delta z k = \Delta\varphi - (\varphi_1 - \varphi_2) \quad \Rightarrow \Delta z = \frac{\lambda}{2\pi}[\Delta\varphi - \Delta\Phi] \qquad (8)$$

Παρατηρείστε ότι η διαπερατότητα εξαρτάται από τη διαφορά των μηκών των βραχιόνων. Αν η διαφορά είναι λ/2 ή 3λ/2 η γενικότερα (2m+1)λ/2 έχουμε μηδενική διαπερατότητα και συνεπώς μέγιστη ανάκλαση.

Αν θα θέλαμε να εκφράσουμε την ανακλαστικότητα σα συνάρτηση του μήκους κύματος, τότε οι σχέσεις μέγιστης και ελάχιστης ανακλαστικότητας μας δίδουν

$$\lambda_{\max} = \frac{2\Delta s}{2m+1} \qquad \mu\varepsilon \qquad m = 0,1,2 \qquad (9)$$
$$\lambda_{\min} = \frac{\Delta s}{m}$$

Παρατηρείστε ότι η διαφορά φάσεων φ_1-φ_2 μετατοπίζει τα μήκη κύματος (= μετατόπιση) που παρουσιάζουν μέγιστη ή μηδενική ανάκλαση.



(ii)

Πράγματι η δεύτερη των σχέσεων (9) μας επιτρέπει να σκεφτούμε ότι αν μεταβάλουμε συνεχώς διαφορά των μηκών των επιμέρους βραχιόνων, π.χ., διατηρώντας τον ένα σταθερό και μεταβάλλοντας το μήκος του άλλου συνεχώς, τότε στο επίπεδο Β θα εμφανίζονται εναλλάξ φωτεινοί και σκοτεινοί κροσσοί. Αν λοιπόν μεταβάλλουμε το μήκος του βραχίονα κατά Δz διέρχονται Ν κροσσοί. Όμως επειδή μεταβολή στα μήκη των βραχιόνων κατά Δz συνεπάγεται μεταβολή κατά 2 Δz στον οπτικό δρόμο (Δz να πάει και Δz να γυρίσει) από την δεύτερη των (9) θα έχουμε ότι

$$\lambda = \frac{\Delta s}{N} = \frac{2\Delta z}{N} \Rightarrow N = \frac{2}{\lambda}\Delta z \qquad (10)$$

Συνεπώς μετρώντας τους κροσσούς που διέρχονται για διάφορες μετατοπίσεις Δz η κλίση της ευθείας δίδει 2/λ.

Εδώ η πειραματική εφαρμογή στην οπτική περιοχή απαιτεί ακριβή μέτρηση της μικρο-μετατόπισης Δz, καθόσον για μετατόπιση ενός μm έχουμε διέλευση περίπου 4 κροσσών.

3ο. Θέμα **Μόρια 25**

Η σχέση $n = 1 + \frac{q_e^2}{2m\varepsilon_0}\sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k\omega}$ (31.20 του βιβλίου σας) δίνει το δείκτη διάθλασης αραιών υλικών συναρτήσει της συχνότητας. Ωστόσο αποδεικνύεται ότι για πυκνά υλικά ο δείκτης διάθλασης δίνεται από τη σχέση: $n^2 = 1 + \frac{q_e^2}{m\varepsilon_0}\sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k\omega}$ (I)

i. Εξηγείστε περιληπτικά πώς προκύπτει η σχέση 31.20. (1)

ii. Ποια η φυσική σημασία του πραγματικού και του μιγαδικού μέρους του n; (1)

iii. Δείξτε ότι η σχέση για τα πυκνά υλικά καταλήγει στην εξ 31.20όταν ο δείκτης διάθλασης είναι πολύ κοντά στη μονάδα (αραιά υλικά). (2)

iv. Για το υλικό fused silica (τετηγμένη πυριτία) έχει μετρηθεί ότι ο δείκτης διάθλασης μπορεί να γραφεί ως

$$n^2 = 1 + \frac{0.69616630\lambda^2}{\lambda^2 - (0.0684043\mu\mathrm{m})^2} + \frac{0.4079426\lambda^2}{\lambda^2 - (0.1162414\mu\mathrm{m})^2} + \frac{0.8974794\lambda^2}{\lambda^2 - (9.896161\mu\mathrm{m})^2} \quad \text{(II)}$$

όπου το μήκος κύματος μετράται σε μm. Συγκρίνατε με την (I) και εκτιμήστε για ποια περιοχή κυμάτων κύματος ισχύει η παραπάνω σχέση (II). (5)

v. Θεωρείστε ότι μια κυματομορφή αποτελείται από 3 μονοχρωματικά επίπεδα κύματα $A_1 = A_1^0\sin(k_1 z - \omega_1 t)$, $A_2 = A_2^0\sin(k_2 z - \omega_2 t)$ και $A_3 = A_3^0\sin(k_3 z - \omega_3 t)$ συχνοτήτων $\nu_1 = 1.9\times10^{15}Hz$, $\nu_2 = 2.0\times10^{15}Hz$ και $\nu_3 = 2.1\times10^{15}Hz$ αντίστοιχα. Έστω ότι τη χρονική στιγμή t = 0 τα κύματα προσπίπτουν στο υλικό fused silica που βρίσκεται στο χώρο με z > 0 και διαδίδονται μέσα σε αυτό.

1. Με βάση τα δεδομένα που σας δίνονται και τα στοιχεία που παρουσιάζονται στα γραφήματα της μελέτης, βρείτε το δείκτη διάθλασης που αντιστοιχεί σε κάθε κύμα. (2)

2. Σχεδιάστε τη κυματομορφή στο κενό (αέρα) (z < 0, t=0) και τη κυματομορφή μέσα στο υλικό (t =T > 0, z > 0) λαμβάνοντας υπόψη μόνο το πραγματικό μέρος του δείκτη διάθλασης. Τι παρατηρείτε σχετικά με τη μορφή του κύματος μέσα στο υλικό; (7)

3. Παίρνοντας υπόψη και το φανταστικό μέρος του δείκτη διάθλασης σχεδιάστε τη κυματομορφή μέσα στο υλικό (t = T > 0, z > 0). Τι παρατηρείτε; Θεωρείστε ότι $A_1^0 = A_2^0 = 1$ και $A_3^0 = 2$ (7)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(a)

i. Κεφάλαιο 31 παράγραφοι 31-1 έως 31-3

ii. Κεφάλαιο 31 παράγραφος 31-4

iii Όταν

$$n \approx 1 \Rightarrow n = (1+\delta) \Rightarrow n^2 = 1 + \cancel{\delta^2} + 2\delta \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$2\delta = \frac{q_e^2}{m\varepsilon_0}\sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k\omega} \Rightarrow \delta = \frac{q_e^2}{2m\varepsilon_0}\sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k\omega}$$

Επομένως $n=\left(1+\delta\right)=1+\frac{q_e^2}{2m\varepsilon_0}\sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2-\omega^2+i\gamma_k\omega}$

iv. Από τη σχέση $n^2=1+\frac{q_e^2}{m\varepsilon_0}\sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2-\omega^2+i\gamma_k\omega}$ και θέτοντας $A_k=\frac{q_e^2}{m\varepsilon_0}N_k$ έχουμε

$$n^2=1+\sum_k \frac{A_k}{\omega_k^2-\omega^2+i\gamma_k\omega}=1+\sum_k \frac{A_k}{\left(\frac{2\pi c}{\lambda_k}\right)^2-\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2+i\gamma_k\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)}=$$

$$1+\sum_k \frac{A_k}{\left(2\pi c\right)^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)^2-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2+i\gamma_k\left(\frac{1}{2\pi c\lambda}\right)}=1+\sum_k \frac{A_k\lambda_k^2}{\left(2\pi c\right)^2}\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_k^2+i\gamma_k\left(\frac{\lambda\lambda_k^2}{2\pi c}\right)}$$

Που είναι στην ίδια μορφή με την (2) αν $\gamma_k=0$ Δηλαδή αγνοούμε την απορρόφηση που σημαίνει ότι οι συχνότητες του κύματος είναι μακριά από τις ιδιοσυχνότητες του μέσου. Οι ιδιοσυχνότητες είναι για την περίπτωσή μας αυτές που αντιστοιχούν στα μήκη κύματος (στο κενό) 68.4nm, 116nm και 9.9μm. Επομένως μια εκτίμηση είναι ότι ισχύει από 0.2 έως 7 μm, δηλαδή για μήκη κύματος μεγαλύτερα (έξω από την περιοχή απορρόφησης) από το μεγαλύτερο μήκος κύματος συντονισμού.

v. 1. Καταρχάς από τις συχνότητες που μας δίνονται υπολογίζουμε τα μήκη κύματος (στο κενό) ότι είναι

	Hz		μm
ν1	$1.9\text{x}10^{15}$	λ1 (κενό)	0.16
ν2	$2\text{x}10^{15}$	λ2 (κενό)	0.15
ν3	$2.1\text{x}10^{15}$	λ3 (κενό)	0.14

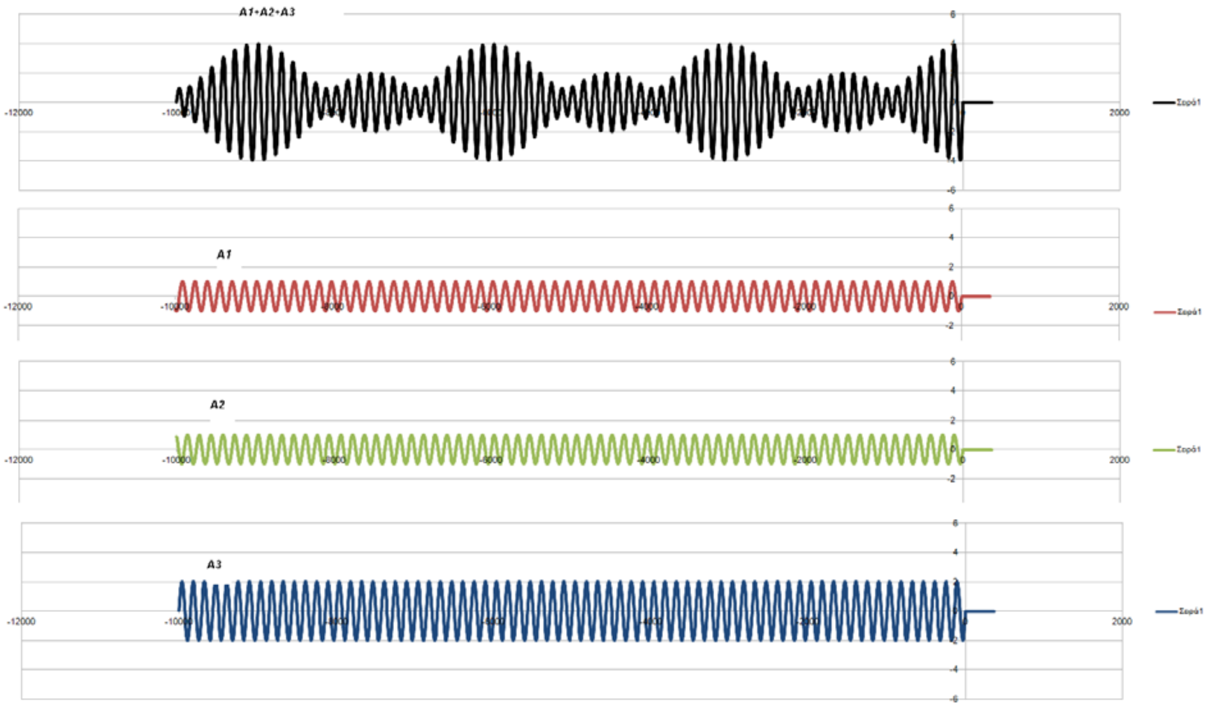
Από το σχήμα 2 της αναφοράς έχουμε ότι

λ (μm)				
0.16	Re(n1)	1.7	Im(n1)	1.00E-04
0.15	Re(n2)	1.8	Im(n2)	1.00E-03
0.14	Re(n3)	1.95	Im(n3)	1.00E-02

2. Για τις κυματομορφές στο κενό (n=1) έχουμε

$A_1=A_1^0\cdot\sin(\frac{2\pi}{\lambda_1}z-2\pi\nu_1 t)$, $A_2=A_2^0\cdot\sin(\frac{2\pi}{\lambda_2}z-2\pi\nu_2 t)$ και $A_3=A_3^0\cdot\sin(\frac{2\pi}{\lambda_3}z-2\pi\nu_3 t)$ και

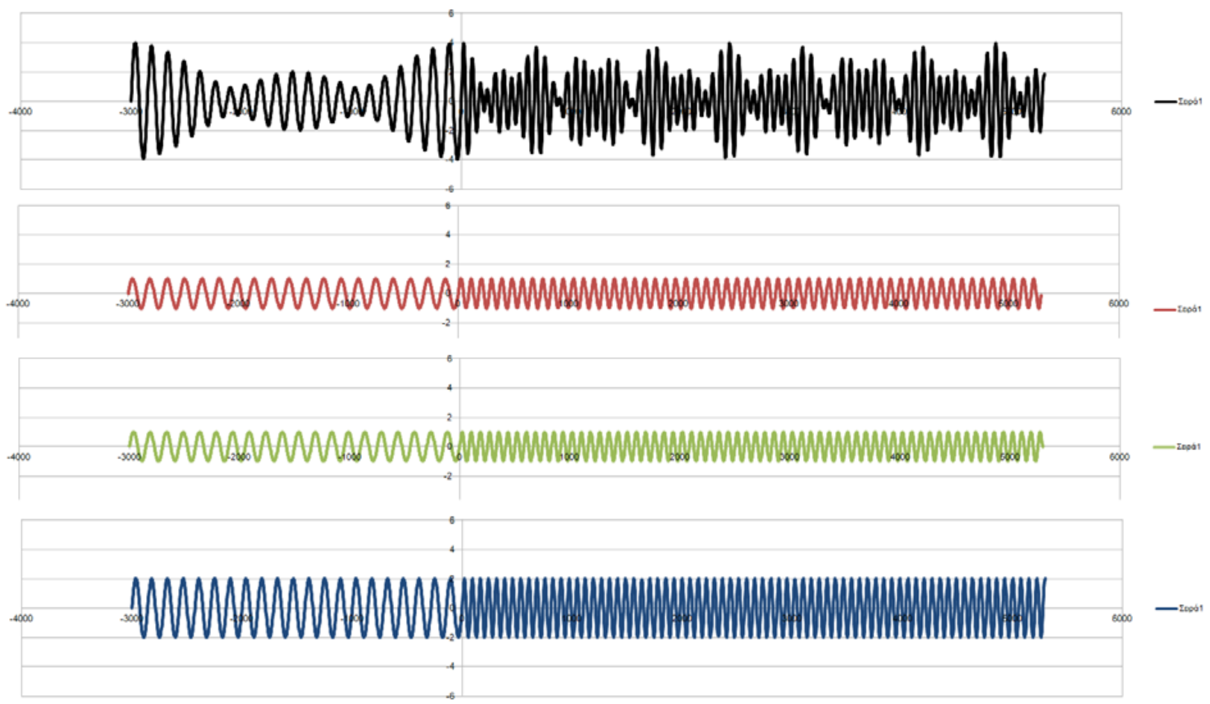
φαίνονται παρακάτω καθώς και το άθροισμά τους



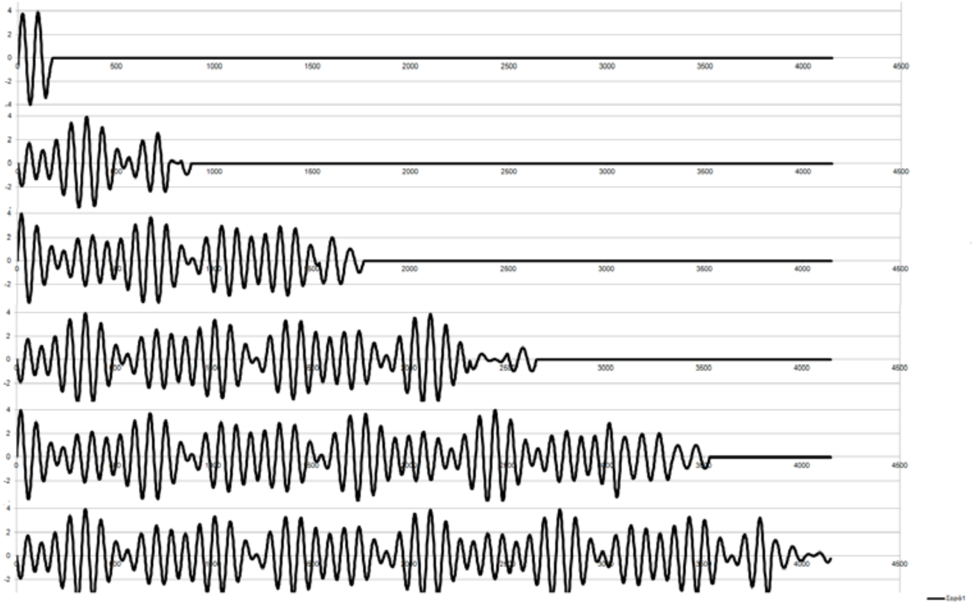
Για μέσα στο υλικό θα έχουμε:

$$A_1 = A_1^0 \cdot \sin(\frac{2\pi}{\lambda_1} n_1 z - 2\pi\nu_1 t)\,,\; A_2 = A_2^0 \cdot \sin(\frac{2\pi}{\lambda_2} n_2 z - 2\pi\nu_2 t) \text{ και } A_3 = A_3^0 \cdot \sin(\frac{2\pi}{\lambda_3} n_3 z - 2\pi\nu_3 t)$$

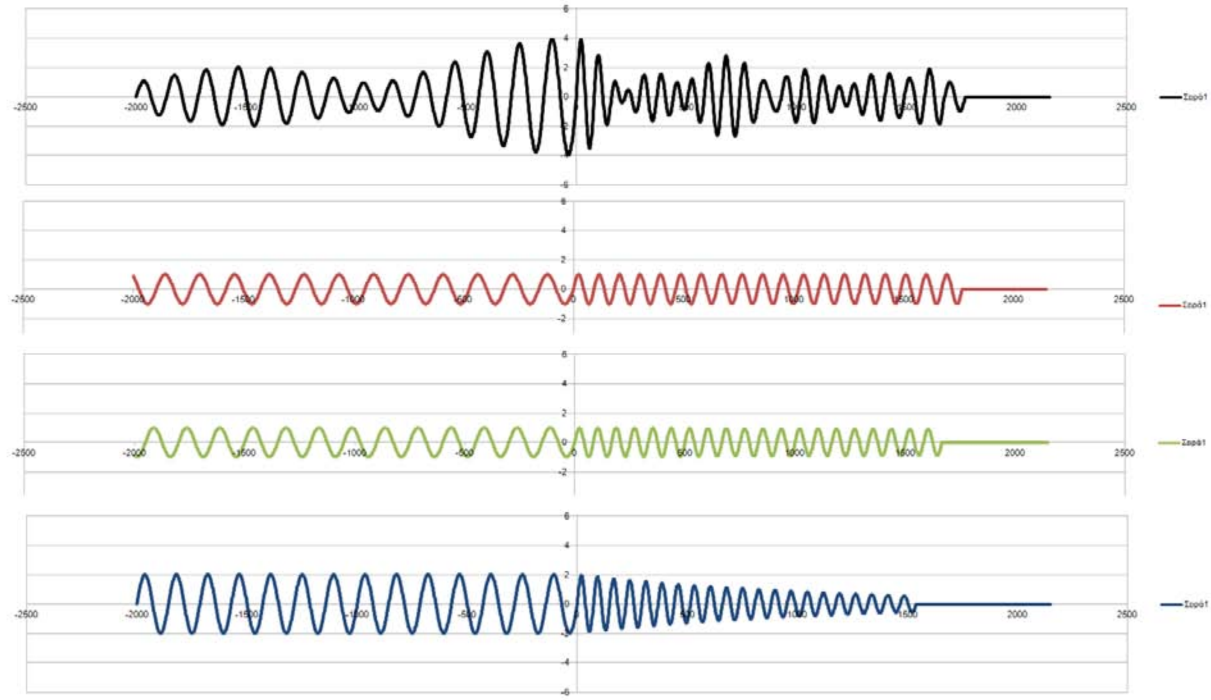
δηλαδή η κάθε αρμονική συνιστώσα διαδίδεται με διαφορετικό κυματάρυθμο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επομένως έχουμε διασπορά και η κυματομορφή αλλάζει συνεχώς μορφή όσο περνάει ο χρόνος



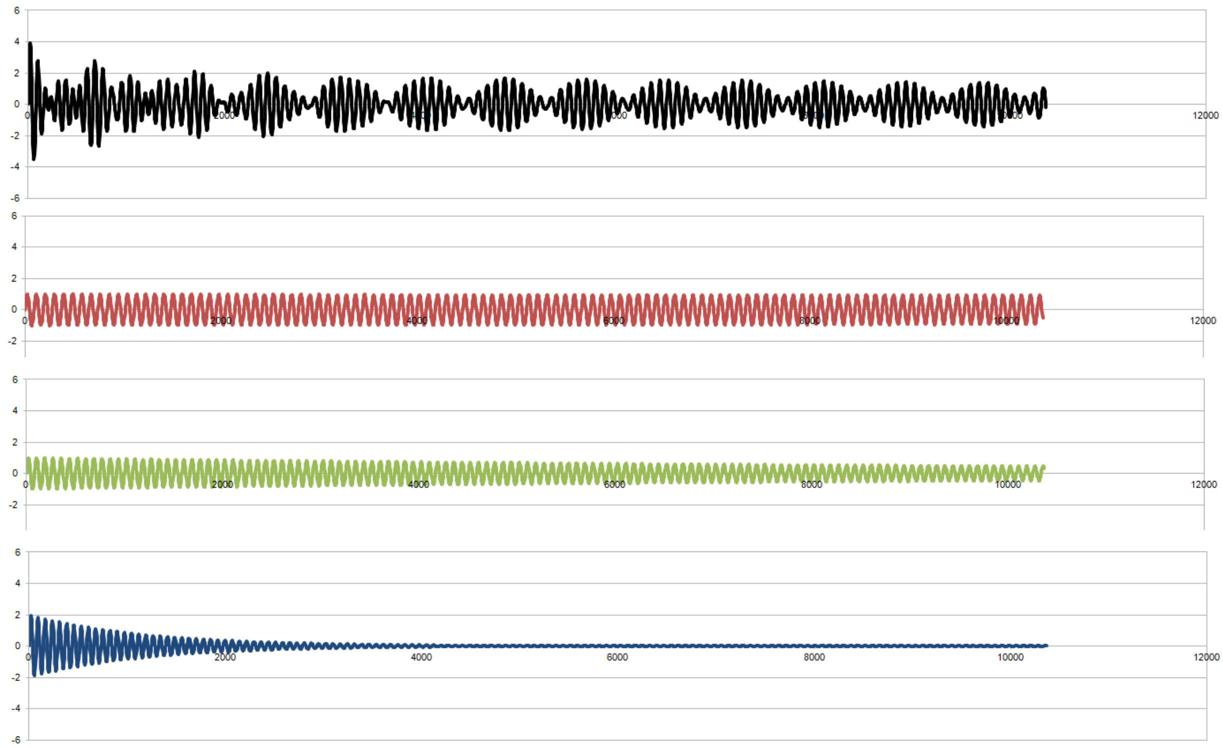
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η συνολική κυματομορφή για αλλεπάλληλα χρονικά διαστήματα:



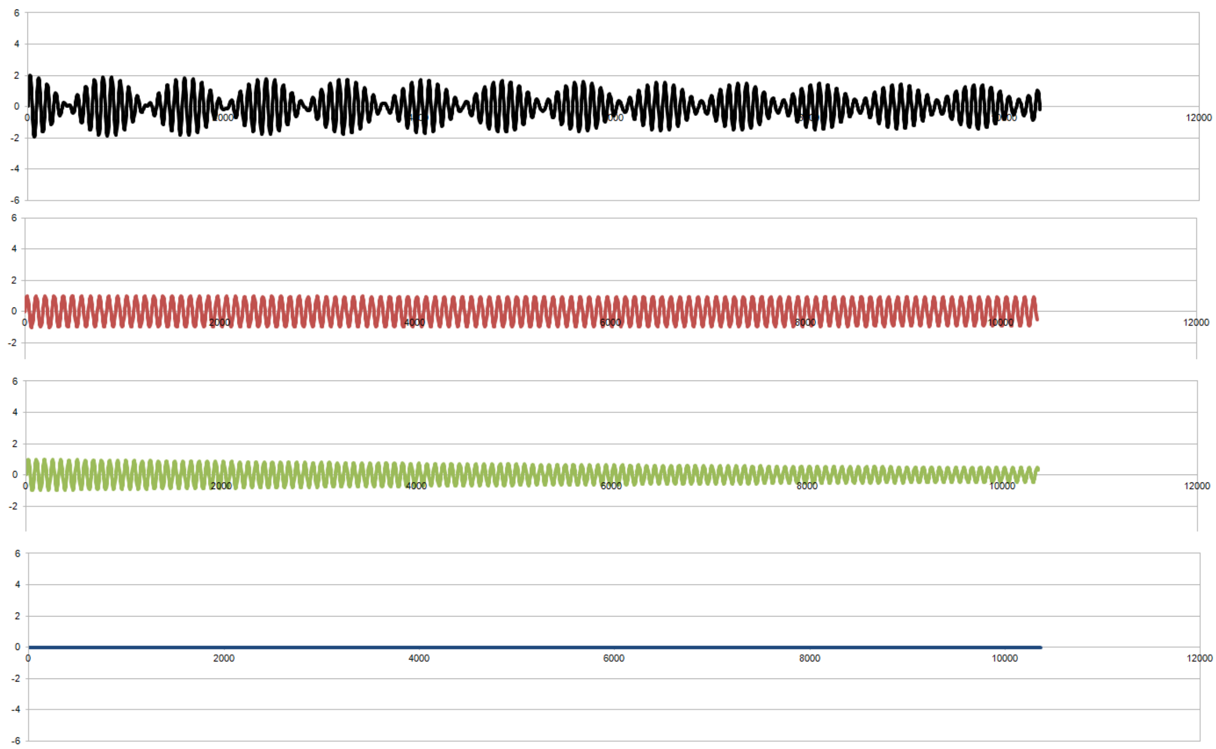
3. Στην περίπτωση όπου έχουμε και απορρόφηση, η τρίτη συνιστώσα που έχει ουσιαστικά μη μηδενικό φανταστικό δείκτη διάθλασης ελαττώνεται με αποτέλεσμα η κυματομορφή σταδιακά να χάνει τη συνεισφορά από αυτή τη συχνότητα.



Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται πώς η τρίτη συνιστώσα «χάνεται» όσο προχωράμε μέσα στο υλικό.



Τελικά η κυματομορφή που παραμένει είναι η A_1+A_2. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται πώς είναι η κυματομορφή όταν $A_3^0 = 0$ για άμεση σύγκριση με το προηγούμενο σχήμα.



Τα παραπάνω σχήματα κατασκευάστηκαν με το αρχείο waves.xls με το οποίο μπορείτε να πειραματιστείτε.

4ο. Θέμα Μόρια 25

a. Εξηγείστε τη διαδικασία εύρεσης της φαινόμενης κίνησης (γραφικά) όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο του βιβλίου σας δίνοντας έμφαση στο παράδειγμα του σχήματος 34-2. (5)

b. Δέσμη ορατής ακτινοβολίας που αποτελείται από δύο μήκη κύματος στο κόκκινο (λ_r = 680nm) και στο πράσινο (λ_g) προσπίπτει σε μία ασυνέχεια που περιέχει δύο λεπτές σχισμές σε μικρή απόσταση d μεταξύ τους. Τα δύο κύματα (κόκκινο και πράσινο) είναι σύμφωνα ως προς τον εαυτό τους. Από τις σχισμές εκπέμπονται δύο σετ δευτερογενών κυμάτων για τα δύο μήκη κύματος και κάθε σετ συμβάλλει σε μία μακρινή οθόνη σε απόσταση r από τις σχισμές όπου παρατηρείται ότι ο πρώτος τάξης σκοτεινός κροσσός του κόκκινου συμπίπτει με τον δεύτερης τάξης φωτεινό κροσσό του πράσινου. Υπολογίστε το μήκος κύματος λ_g. (10)

c. Μονοχρωματικό σύμφωνο φως μήκους κύματος λ_o = 640 nm προσπίπτει κάθετα σε επίπεδη επίστρωση διηλεκτρικού υλικού δείκτη διάθλασης n = 1.3. Η επίστρωση είναι πάνω σε γυάλινο επίπεδο πλακίδιο δείκτη διάθλασης n_g = 1.6. Αν η όλη διάταξη περιβάλλεται από αέρα (n_0 = 1.0), πόσο πρέπει να είναι το ελάχιστο δυνατό πάχος της επίστρωσης έτσι ώστε το ανακλώμενο φως από τις δύο διαχωριστικές επιφάνειες αέρα- επίστρωσης και επίστρωσης-γυαλιού να ελαχιστοποιηθεί. Τι ποσοστό της προσπίπτουσας φωτεινής ισχύος αντιπροσωπεύουν οι δύο πρώτες ανακλώμενες δέσμες (μία από κάθε διαχωριστική επιφάνεια). (10)

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

(A) Παράγραφος 34-1, 34-2

(B) Η απόσταση του σκοτεινού κροσσού πρώτης τάξης (m = 1) για το κόκκινο δίνεται από την

$y_{1r}=\frac{r}{d}(1+\frac{1}{2})\lambda_r=\frac{1.5r\lambda_r}{d}$ (1)

Η απόσταση του φωτεινού κροσσού δεύτερης τάξης (m = 2) για το πράσινο

$y_{2g}=\frac{2r\lambda_g}{d}$ (2)

Απο (1), (2) ⇒ $\frac{y_{1r}}{y_{2g}}=\frac{\frac{1.5r\lambda_r}{d}}{\frac{2r\lambda_g}{d}}=\frac{0.75\lambda_r}{\lambda_g}$

Όμως $y_{1r}=y_{2g}$ ⇒

λ_g= 0.75×680nm=510nm

(C) Για να ελαχιστοποιηθεί το ανακλώμενο φως θα πρέπει οι δύο ανακλώμενες δέσμες από τις δύο διεπιφάνειες να συμβάλλουν σε αντίθετη φάση. Αφού αμφότερες οι ανακλάσεις αντιστοιχούν σε πρόσπτωση από οπτικά αραιότερο σε οπτικά πυκνότερο δεν θα υπάρξει διαφοροποίηση φάσης κατά τις ανακλάσεις. Επομένως, κάθε διαφορά φάσης θα οφείλεται σε διαφορά οπτικού δρόμου. Για αναιρετική συμβολή πρέπει:

$$2nd = (2m+1)\,\lambda_0/2 \qquad (1)$$

n=1.3, λ_0=640nm m=0 (για ελάχιστο δυνατό πάχος d) και

d = λ_0/4n = 640nm/4x1.3 = 123 nm (επίστρωση τετάρτου μήκους κύματος)

Για την ανάκλαση στη διεπιφάνεια αέρα-επίστρωσης και για κάθετη πρόσπτωση η ανακλαστικότητα R δίνεται από την

$R=(\frac{n-n_0}{n+n_0})^2=(\frac{0.3}{2.3})^2=0.017$ η 1.7% της προσπίπτουσας φωτεινής ισχύος.

Η προσπίπτουσα δέσμη στην εσωτερική διεπιφάνεια επίστρωσης-γυαλιού θα έχει φωτεινή ισχύ

$T = 1 – R = 0.983$ ή 98.3%. Η ίδια τιμή βρίσκεται από την σχέση $T = 4n_o n/(n_o+n)^2$.

Έτσι από την ανάκλαση στη διεπιφάνεια επίστρωσης - γυαλιού θα προκύψει φωτεινή ισχύς που θα είναι ίση με κλάσμα $TR^/$ της αρχικής ισχύος, όπου:

$R^/ = (n_g – n / n_g + n_o)^2 = (0.3 / 2.9)^2 = 0.0107$

και $TR^/ = 0.983 \text{ x } 0.0107 = 1.052\text{x}10^{-3}$

Στη συνέχεια, η ανακλώμενη στην εσωτερική διεπιφάνεια θα διέλθει την πρώτη επιφάνεια με διαπερατότητα $T^/ = T$ και θα εξέλθει με ισχύ ίση με κλάσμα ίσο με

$TR^/T^/ = 1.052\text{x}10^{-3} \text{ x } 0.983 = 1.034\text{x}10^{-3}$ ή =περίπου 1.0%